Università degli Studi di Cagliari
Corsi di Laurea Magistrale in Ing. Elettronica

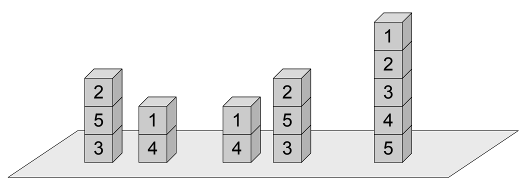
Corso di Intelligenza Artificiale
A.A. 2016/2017

Esercizi sugli algoritmi di ricerca su grafi

1. Si hanno a disposizione due brocche, una da tre litri e una da cinque, e una sorgente d'acqua. Le due brocche sono inizialmente vuote, e si vuole far sì che una qualsiasi di esse contenga esattamente un litro d'acqua e l'altra sia vuota, attingendo dalla sorgente la minor quantità possibile di acqua. Per ottenere questo è possibile riempire una qualsiasi delle brocche attingendo l'acqua dalla sorgente, oppure svuotare una delle brocche gettando via l'acqua, o versare l'acqua da una brocca qualsiasi all'altra fino a che la prima sia vuota o la seconda sia piena.

   (a) Formulare questo problema come un problema di ricerca su grafi: definire lo spazio degli stati, lo stato o gli stati obbiettivo, le azioni, e il costo di ogni azione.
   (b) Risolvere il problema con l'algoritmo di ricerca a costo uniforme, evitando gli stati ripetuti.
   (c) Discutere la possibiltà di definire euristiche ammissibili per algoritmi di ricerca informata.

2. Si consideri un gioco in cui si hanno a disposizione cinque cubi numerati da 1 a 5, i quali possono essere disposti in vari modi sopra un tavolo (in figura si mostrano tre possibili disposizioni). Ciascuno dei blocchi può trovarsi sul tavolo oppure sopra un altro blocco. Partendo da una disposizione qualsiasi, l'obbiettivo consiste nel disporre i blocchi in un'unica pila, con il blocco 5 sul tavolo e gli altri sopra di esso nell'ordine indicato nella figura a destra, spostando il minor numero possibile di blocchi. L'unica azione ammessa è lo spostamento di un blocco sul tavolo oppure sopra un altro blocco, purchè sia il blocco da spostare che l'eventuale blocco su cui questo viene posato non abbiano altri blocchi al di sopra di essi. La posizione relativa delle diverse pile di blocchi non conta (per esempio, la disposizione nella figura a sinistra è equivalente a quella al centro).



   (a) Formulare tale problema come un problema di ricerca su grafi, definendo in modo preciso lo spazio degli stati, lo stato obbiettivo, le azioni, e il costo di ogni azione.
   (b) Considerando come funzione euristica il numero di blocchi che non si trovino sulla pila più alta (o su una delle più alte, nel caso di più pile aventi la stessa altezza), e come stato di partenza quello nella figura a sinistra, costruire l'albero di ricerca ottenuto con l'algoritmo A* espandendo i primi quattro nodi, ed evitando gli stati ripetuti.
   (c) Definire un'euristica ammissibile alternativa a quella indicata sopra, motivandone chiaramente l'ammissibilità.

3. Il problema della coloratura di una mappa geografica consiste nel colorare le sue regioni usando k colori diversi, facendo in modo che a nessuna coppia di regioni confinanti sia assegnato lo stesso colore (tale vincolo non si applica alle eventuali regioni che confinino in un solo punto). È stato dimostrato che questo problema ha sempre soluzione per $k \geq 4$.

   (a) Si formuli questo problema, nel caso di $k = 4$ colori, come un problema di ricerca su grafi, definendo lo spazio degli stati, l'obbiettivo, le azioni e il costo di queste ultime. Si determini inoltre la profondità della soluzione o delle soluzioni e il *branching factor* dell'albero di ricerca.
   (b) Si dica quale algoritmo di ricerca non informata si ritiene più adatto, in termini di complessità temporale e spaziale, alla risoluzione del problema secondo la formulazione data nel punto precedente. Si discuta inoltre la possibilità di applicare algoritmi di ricerca informata.

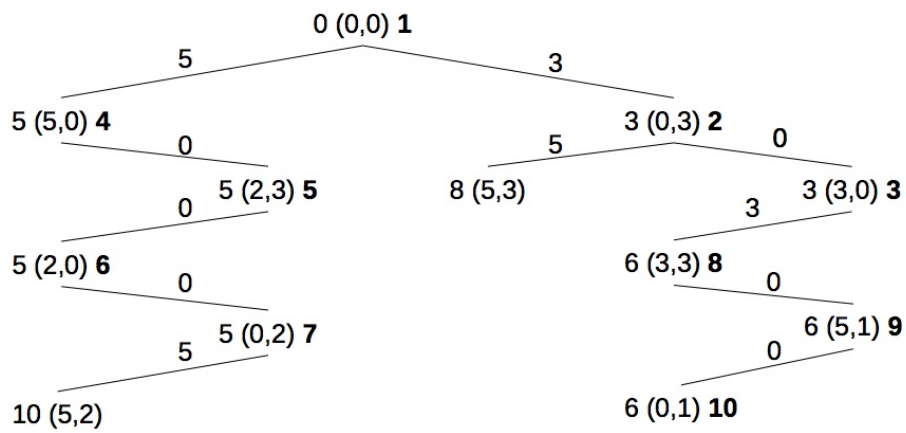
Soluzione

Esercizio 1

(a) Uno stato può essere rappresentato da una coppia di numeri (b_1, b_2) che corrispondono alla quantità di acqua (in litri) pesente nelle due brocche (b_1 indica il contenuto della brocca più grande). Tenendo conto delle possibili azioni, lo spazio degli stati è l'insieme delle coppie di interi (b_1, b_2) tali che $b_1 \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ e $b_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si noti che non tutte le azioni sono reversibili, quindi lo spazio degli stati sarà un grafo orientato. Un nodo (stato) A è connesso a un altro nodo B (con un arco orientato da A a B), se è possibile raggiungere B a partire da A con una delle azioni permesse (per es., lo stato $(5, 3)$ è connesso a $(5, 0)$, poiché il secondo può essere raggiunto dal primo gettando via l'intero contenuto della seconda brocca). Lo stato iniziale è $(0, 0)$, mentre si hanno due stati obiettivo: $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Le azioni possono essere definite attraverso una funzione successore $SF(b_1, b_2)$, che restituisce tutte le coppie $((b_1', b_2'), a)$, dove (b_1', b_2') è uno stato raggiungibile da (b_1, b_2) con l'azione a (a è una qualsiasi descrizione dell'azione, per es. una stringa). Tenendo conto del vincolo di dover attingere dalla sorgente la minor quantità possibile di acqua, il costo di ciascuna azione è pari alla corrispondente quantità di acqua attinta dalla sorgente.

(b) L'albero di ricerca con la strategia di ricerca a costo uniforme è riportato in figura. Alla sinistra di ogni nodo indicato il *path cost*, alla destra (in neretto) l'ordine di espansione. Su ogni arco è indicato il costo dell'azione (l'azione non è indicata esplicitamente, ma può essere individuata con facilità).



(c) Lo spazio degli stati è molto piccolo (possono esistere al più 24 stati distinti), ed è facile vedere che la soluzione ottimale ha costo pari a 6. Le euristiche ammissibili sono inoltre poco informative. Per esempio, rilassando alcuni dei vincoli si ottengono soluzioni banali: se si permette di rimepire parzialmente una brocca versando in essa una quantità *nota* di acqua dalla sorgente, o dall'altra brocca (per es., un litro, due litri, ecc.), o se si permette di gettar via una quantità limitata e *nota* di acqua da una brocca, la soluzione può essere raggiunta da un qualsiasi nodo con costo unitario o nullo. Non è quindi utile applicare strategie di ricerca informata a questo problema.

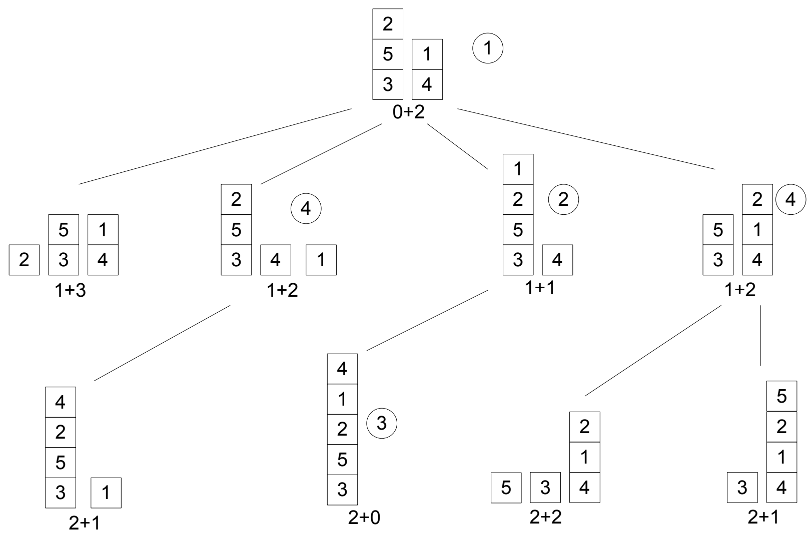
Esercizio 2

(a) Lo spazio degli stati è costituito dall'insieme delle possibili disposizioni dei blocchi in una o più pile (fino a cinque), indipendentemente dalla posizione relativa di queste ultime. Uno stato può essere rappresentato da un insieme di sequenze ordinate, ciascuna delle quali corrisponde a una pila; per es., la disposizione a sinistra e quella al centro in figura (equivalenti) sono rappresentate da $\{(2, 5, 3), (1, 4)\}$, seguendo la convenzione che la sequenza dei blocchi di ogni pila da sinistra a destra corrisponde alla loro disposizione dall'alto in basso. Uno solo di tali stati sarà lo stato obbiettivo.

Le azioni possono essere definite attraverso una funzione successore $SF(s)$ che, dato uno stato s (rappresentato come indicato sopra), restituisce tutte le coppie (s', a), dove s' è uno stato raggiungibile da s con l'azione a, e quest'ultima è una delle azioni ammesse.

Tutte le azioni hanno lo stesso costo, dato che si vuole arrivare allo stato obbiettivo spostando il minor numero di blocchi. Il costo può essere assunto pari a 1.

(b) L'albero di ricerca generato espandendo i primi quattro nodi con la strategia A* e l'euristica indicata, ed evitando gli stati ripetuti, è il seguente.

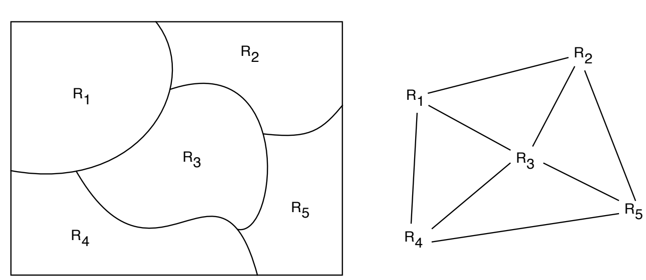


Sotto ogni stato è indicato il valore corrispondente della funzione di valutazione (*path cost* + funzione euristica). I numeri indicati nei cerchietti indicano l'ordine di **espansione** dei nodi. Si noti che il terzo nodo selezionato per l'espansione non ha successori, dato che l'unico stato raggiungibile corrisponde a quello del nodo padre. Per il quarto nodo esistono due possibili scelte, cioè due nodi con lo stesso valore della funzione di valutazione (indicati entrambi con il numero 4): in figura è mostrato il risultato che si otterrebbe espandendo sia un nodo che l'altro.

(c) Un'altra possibile euristica ammissibile è il numero di blocchi al di sopra dei quali si trovi un blocco diverso da quello previsto nello stato obbiettivo. Tale valore può essere espresso come $\sum_{i=1}^{N} B_i$, dove N è il numero di blocchi (in questo caso, $N = 5$), e $B_i = 1$ se sopra il blocco i non si trova quello previsto dallo stato obbiettivo, mentre $B_i = 0$ in caso contrario. In particolare, $B_1 = 0$ se sopra il blocco 1 non ci sono altri blocchi. L'euristica è ammissibile, poiché se un blocco k non si trova sotto il corrispondente blocco previsto, sarà necessario almeno uno spostamento per ottenere tale configurazione.

Esercizio 3

(a) La mappa può essere rappresentata come un grafo non orientato $\mathcal{G}$, in cui ogni nodo corrisponde a una regione, e gli archi connettono coppie di regioni confinanti. Un esempio di mappa con cinque regioni è mostrato in figura.



Ogni nodo può essere etichettato con il colore corrispondente. Di eseguito le etichette dei quattro colori verranno indicate con $c_1, \ldots, c_4$. È utile rappresentare anche soluzioni parziali in cui ad alcune regioni non sia stato ancora assegnato un colore: l'etchetta corrispondente sarà indicata con c_0. Una possibile formulazione del problema è la seguente.

- Uno stato corrisponde a una qualsiasi assegnazione di colori (incluso c_0) ai nodi di $\mathcal{G}$, che rispetti il vincolo sui colori delle regioni confinanti (cioè non devono esistere coppie di nodi di $\mathcal{G}$ connessi da un arco e aventi una etichetta identica e diversa da c_0).
- Lo spazio degli stati è a sua volta un grafo i cui nodi sono definiti come indicato sopra, e ogni arco connette due nodi le cui mappe differiscano per il colore di una singola regione.
- Lo stato iniziale corrisponde alla mappa in cui ogni regione abbia etichetta c_0 (cioè, al caso in cui a nessun nodo di $\mathcal{G}$ sia assegnato un colore). Gli stati obbiettivo sono quelli in cui ogni regione abbia un colore (cioè, ogni nodo di $\mathcal{G}$ ha un'etichetta diversa da c_0).
- Le azioni corrispondono all'assegnazione di un colore a un nodo di $\mathcal{G}$ non ancora colorato (cioè avente etichetta c_0), purché tale colore sia diverso da quelli eventualmente già assegnati alle regioni adiacenti. Tali azioni possono essere definite come una funzione successore $SF(\mathcal{G})$ che, data una mappa (stato) $\mathcal{G}$, restituisce tutte le coppie $(\mathcal{G}', a)$ dove $\mathcal{G}'$ è la mappa ottenuta assegnando un colore a una delle sue regioni non ancora colorate, e a indica tale regione e il colore assegnato. In questo problema non ci sono ulteriori requisiti esprimibili in termini di costo delle azioni.

Detto R il numero delle regioni, nella formulazione proposta ogni stato obbiettivo si trova a profondità R: infatti ogni operatore corrisponde all'assegnazione di un colore a un singolo nodo non ancora colorato, che rispetti il vincolo del problema. È anche facile convincersi che ogni nodo dell'albero di ricerca a profondità R corrisponde a uno stato obbiettivo.

Il *branching factor* dipende dal numero di nodi aventi etichetta c_0, e da quanti colori tra quelli disponbili possono essere assegnati a ciasuno di tali nodi senza violare il vincolo. Per esempio, il *branching factor* dello stato iniziale è $k \times R$, poiché da tale stato è possibile assegnare ciascuno dei k colori a uno qualsiasi degli R nodi di $\mathcal{G}$.

(b) Nella formulazione proposta, il *branching factor* di alcuni nodi può essere molto elevato. D'altra parte, non tutte le assegnazioni parziali di colori ai nodi di $\mathcal{G}$ consentiranno di arrivare a una soluzione. In altre parole, possono esistere alcune foglie dell'albero di ricerca a profondità $d < R$ corrispondenti ad assegnazioni di colori a d regioni di $\mathcal{G}$, tali che per le restanti $R - d$ regioni non esistano assegnazioni di colori compatibili con il vincolo del problema. Dato che tutte le soluzioni si trovano alla profondità massima, la strategia di ricerca in ampiezza espanderà tutti i nodi fino alla profondità $R - 1$. Inoltre tale strategia richede di mantenere in memoria tutti i nodi generati dell'albero di ricerca. La ricerca a costo uniforme non è applicabile, poiché il costo delle azioni non è definito. La ricerca in profondità richiede di mantenere in memoria solo i nodi nel percorso dalla radice fino all'ultimo nodo generato. Inoltre il numero di nodi espansi potrebbe essere molto inferiore a quello della ricerca in ampiezza (nel caso migliore possono essere espansi solo R nodi). Si può concludere che la ricerca in profondità è la soluzione migliore.

Poichè le azioni non hanno un costo, le strategie di ricerca informata non possono essere applicate. D'altra parte, tenendo conto che tutte le soluzioni si trovano a profondità R, e che questa à la profondità massima dell'albero di ricerca, un algoritmo di ricerca informata potrebbe essere utile solo se consentisse di trovare una soluzione con una complessità temporale inferiore rispetto alla ricerca in profondità. In altre parole, un algoritmo di ricerca informata sarebbe utile se consentisse di orientare la ricerca verso i percorsi che portano a uno degli stati obiettivo, evitando i percorsi che portano a foglie a profondità minore di R (tali foglie corrispondono ad assegnazioni di colori a un sottoinsieme di regioni, tali che qualsiasi assegnazione alle restanti regioni non possa rispettare il vincolo del problema). Non è però possibile definire un'euristica con queste proprietà. Per esempio, assegnando un costo convenzionale pari a 1 a ogni azione, tutte le soluzioni avrebbero un costo pari a R; ne consegue che per ogni nodo a profondità $d < R$ la distanza *esatta* dalla soluzione è $R - d$, se il nodo si trova in un percorso che porta a uno stato obbiettivo, oppure $+\infty$ in caso contrario; la migliore euristica ammissibile è dunque quella che assegna il valore $R - d$ a **ogni** stato, il che ovviamente non fornisce nessuna informazione utile (si noti che l'algoritmo A* con tale euristica corrisponde alla ricerca in ampiezza).