Esercitazione
Analisi delle incertezze

1 - Oggetto

- Esempio di applicazione della Norma UNI CEI 9 ("Guida all'espressione dell'incertezza di misura").
- Analisi di dati provenienti da serie di osservazioni e determinazione dei principali parametri statistici.
- Presentazione dei risultati: cifre significative.

2 - Analisi dei dati sperimentali: misura di una reattanza

Dati del problema
Si consideri un'impedenza **Z** = *R*+j*X* sottoposta alla tensione sinusoidale *U* e attraversata dalla corrente *I*. La reattanza *X* può essere determinata, misurando le ampiezze *U* ed *I* e l'angolo di fase φ tra tensione e corrente, secondo al relazione:

$$X = \frac{U}{I}\,\mathrm{sen}\varphi$$

Si supponga di effettuare cinque gruppi indipendenti di osservazioni simultanee delle tre variabili di ingresso (*U*, *I* e φ), ottenendo i risultati rappresentati dai dati di Tabella 1:

Tabella 1

N. prova	*U* (V)	*I* (mA)	φ (rad)
1	5.007	19.663	1.0456
2	4.994	19.639	1.0438
3	5.005	19.640	1.0468
4	4.990	19.685	1.0428
5	4.999	19.678	1.0433

L'esempio proposto considera solamente le variazioni casuali delle osservazioni, e trascura invece i contributi degli effetti sistematici.
Si intende determinare:
- per ciascuna delle grandezze *U*, *I* e φ: il valore medio, la deviazione standard e lo scarto tipo sperimentale della media;
- il valore della stima della reattanza *X*, ovvero il risultato della misurazione, e l'incertezza tipo composta di tale risultato.

Risultati

I parametri statistici delle serie di osservazioni di tensione, corrente e sfasamento sono stati calcolati applicando le loro definizioni. Qui riportiamo le espressioni utilizzate, in funzione di una generica grandezza *w*, che può rappresentare una qualsiasi delle tre grandezze misurate:

- Valore medio: $\overline{w} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} w_k$, assunto come risultato della misura della singola grandezza.
- Deviazione standard: $s(w_k) = \sqrt{\frac{1}{5-1}\sum_{k=1}^{5}(w_k - \overline{w})^2}$
- Scarto tipo sperimentale della media: $u_w = s(\overline{w}) = \frac{s(w_k)}{\sqrt{5}}$, assunto come incertezza associata al risultato.

I risultati delle elaborazioni sono riassunti nella Tabella 2:

Tabella 2

	U (V)	*I* (mA)	φ (rad)
Valore medio	4.999	19.661	1.04446
Deviazione standard	7E-3	2.1E-2	$1.7 \cdot 10^{-3}$
Scarto tipo della media	3E-3	9E-3	$7.5 \cdot 10^{-4}$

Il valore della reattanza *X* può essere ottenuto mediante due metodi differenti.

- Nel primo metodo si impiegano per *U*, *I* e φ i valori medi riportati nella Tabella 2.

$$X = \frac{U}{I}\text{sen}\varphi = \frac{4.999}{19.661 \cdot 10^{-3}}\text{sen}(1.00446) = 219.847\ \Omega$$

L'incertezza tipo composta del risultato può essere determinata mediante la regola generale di composizione delle incertezze:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial w_i}\right)^2 u_{w_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial f}{\partial w_j}u_{w_i,w_j}}$$

dove, nel caso in esame, *m* è pari a 3.

Per applicare l'espressione occorre conoscere le covarianze tra le singole grandezze di ingresso. Infatti in questo caso la correlazione tra le variabili acquisite non può essere trascurata, a causa della simultaneità delle serie di acquisizioni.

Come noto, la covarianza e il coefficiente di correlazione possono essere stimati, sulla base di *N* misure delle variabili aleatorie, con le seguenti espressioni:

$$u_{w_i,w_j} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}\left(w_{ik} - \overline{w}_i\right)\left(w_{jk} - \overline{w}_j\right) \quad \text{e} \quad r_{w_i,w_j} = \frac{u_{w_i,w_j}}{u_{w_i}u_{w_j}}$$

Nel nostro caso risulta: $r_{U,I}$ = - 0.36; $r_{U,\varphi}$ = 0.86; $r_{I,\varphi}$ = - 0.65.

Pertanto, sviluppando l'espressione dell'incertezza tipo composta si ottiene:

$$u_X^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 u_U^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial I}\right)^2 u_I^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 u_\varphi^2 + 2\left[\frac{\partial X}{\partial U}\frac{\partial X}{\partial I} r_{U,I} u_U u_I + \frac{\partial X}{\partial U}\frac{\partial X}{\partial \varphi} r_{U,\varphi} u_U u_\varphi + \frac{\partial X}{\partial I}\frac{\partial X}{\partial \varphi} r_{I,\varphi} u_I u_\varphi\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{I}\mathrm{sen}\varphi\right)^2 u_U^2 + \left(-\frac{U}{I^2}\mathrm{sen}\varphi\right)^2 u_I^2 + \left(\frac{U}{I}\cos\varphi\right)^2 u_\varphi^2 + 2\left(\frac{1}{I}\mathrm{sen}\varphi\right)\left(-\frac{U}{I^2}\mathrm{sen}\varphi\right) r_{U,I} u_U u_I +$$

$$2\left(\frac{1}{I}\mathrm{sen}\varphi\right)\left(\frac{U}{I}\cos\varphi\right) r_{U,\varphi} u_U u_\varphi + 2\left(-\frac{U}{I^2}\mathrm{sen}\varphi\right)\left(\frac{U}{I}\cos\varphi\right) r_{I,\varphi} u_I u_\varphi$$

Da cui risulta in definitiva: $u_X^2 = 0.087\Omega^2 \quad \Rightarrow \quad u_X = \sqrt{0.087} = 0.295\Omega$.

- Nel secondo metodo si calcola un valore di reattanza per ciascuna terna di dati di ingresso, come riportato in Tabella 3. Si considera poi la media dei cinque valori così ottenuti per X come la stima migliore della reattanza.

Tabella 3

N. prova	U (V)	I (mA)	φ (rad)	X(Ω)
1	5.007	19.663	1.0456	220.32
2	4.994	19.639	1.0438	219.79
3	5.005	19.640	1.0468	220.64
4	4.990	19.685	1.0428	218.97
5	4.999	19.678	1.0433	219.51
Valore medio				219.847

Lo scarto tipo di tale risultato può essere calcolato col metodo usuale, sulla base dei cinque valori di X ottenuti. Risulta l'incertezza $u_X = 0.295\ \Omega$.

Commento

I risultati delle stime di X e delle relative incertezze ottenute con i due metodi sono coincidenti, a meno di effetti del secondo ordine dovuti alla non linearità della funzione considerata e trascurabili in questo caso.

I dati avrebbero potuto anche essere ottenuti, con un procedimento poco corretto dal punto di vista metrologico, mediante cinque misure di tensione, cinque misure di corrente e cinque misure di sfasamento tra loro indipendenti (cioè non effettuate simultaneamente a terne).

In tal caso il secondo metodo sarebbe stato inadatto e si sarebbe dovuto applicare il primo metodo, essendo però in tal caso da considerare assenti le correlazioni tra le grandezze d'ingresso.

3 - Cifre significative nella presentazione numerica dei risultati

Nella presentazione del risultato di una misura le cifre riportate devono contenere tutte le informazioni che possono essere correttamente utilizzate.

Il numero di cifre riportate è un'utile indicazione di quanto sia preciso il risultato della misurazione effettuata, nel senso che quanto maggiore è il numero di cifre significative utilizzate, tanto migliore è la precisione. È pertanto compito dell'operatore escludere quelle cifre che non contengono informazioni utili, e che potrebbero generare confusione nella lettura dei dati e appesantimento delle successive elaborazioni numeriche.

È buona norma riportare l'incertezza con una o al massimo due cifre significative: queste devono quindi incidere sull'ultima cifra, o sulle ultime due, del valore di misura riportato.
Un'altra convenzione accettata praticamente da tutti riguarda l'arrotondamento di un numero quando si debbano scartare delle cifre non ritenute significative. In tal caso l'ultima cifra che si conserva rimane invariata se la prima cifra eliminata è inferiore a 5, mentre viene incrementata di uno se la prima cifra eliminata è maggiore o uguale a 5. Come esempio, i valori di reattanza riportati in Tabella 3 sono stati arrotondati sulla base di questo principio.
Particolarmente delicata risulta la trattazione degli zeri, sia a destra che a sinistra dell'indicatore decimale (virgola o punto). Molto spesso questi zeri non sono delle cifre significative, ma hanno la sola funzione di indicare l'entità numerica del dato presentato, cioè la corretta posizione delle cifre significative.
Per esempio, affermare che tra due conduttori di una linea elettrica in Alta Tensione sussiste una differenza di potenziale di 380 000 V non significa che tale misura possa essere effettuata con incertezze dell'ordine del volt (come si potrebbe erroneamente intendere sulla base delle cifre riportate). Allo stesso modo utilizzare uno shunt di corrente del valore nominale di 0.015 Ω non implica che il valore di tale resistenza possa essere noto con 4 cifre significative.
Per evitare confusione è buona prassi riportare, quando necessario, i risultati delle esperienze scientifiche secondo una notazione che impiega i multipli e i sottomultipli previsti nel Sistema Internazionale delle unità di misura, oppure, in alternativa, le potenze di 10.
Per gli esempi precedenti, ipotizzando per entrambi di poter considerare tre cifre significative, sarebbe quindi più corretto riportare rispettivamente una tensione di 380 kV (oppure $3.80 \cdot 10^5$ V) e una resistenza di 15.0 mΩ (oppure $1.50 \cdot 10^{-2}$ Ω). Utilizzando questa notazione, tutti gli zeri riportati, anche se in posizione di ultima cifra a destra dell'indicatore decimale, sono da considerare cifre significative e quindi danno un'informazione sulla precisione della misura.
Merita infine un cenno l'uso delle cifre significative nel caso di misure indirette.
Il criterio generale è quello di effettuare una valutazione dell'incertezza sul valore ottenuto e quindi scrivere il risultato avendo cura di eliminare tutte quelle cifre che risultano inutilizzabili (con eventuale arrotondamento).
Alcuni casi particolari possono tuttavia essere trattati con metodi più semplici e immediati, che consentono in genere una valutazione sufficientemente corretta.
Quando un valore è ottenuto come somma di più valori misurati, il risultato può essere accurato (in termini di incertezza assoluta) al massimo quanto il meno accurato dei singoli valori misurati. Il numero di cifre significative riportate nella presentazione di tale risultato deve pertanto tener conto di questo fatto.
Nella moltiplicazione di più valori il numero di cifre può crescere notevolmente, ma solo quelle significative (pari a quelle del fattore rappresentato col minor numero di cifre) devono essere mantenute nel risultato.

Esempi

1) Si considerino due resistori R_1 e R_2 connessi in serie. I valori delle due resistenze, misurate con un multimetro digitale a 3 ½ cifre con incertezza di ± 3 *digit*, risultano:

   $R_1 = 46.7\ \Omega$; $R_2 = 1.624\ \Omega$

   Si determini la resistenza totale della serie, esprimendola con l'appropriato numero di cifre significative.

   Soluzione

   Nell'espressione delle due resistenze l'ultima cifra è affetta dall'incertezza strumentale, che quindi è dell'ordine dei decimi di ohm per R_1 e dei millesimi di ohm per R_2.

Pertanto, nell'esprimere il valore della resistenza totale:

$R_T = R_1 + R_2 = 48.324\ \Omega$

bisogna eliminare le ultime due cifre in quanto l'incertezza maggiore, determinata dalla misura di R_1, ricade già sulla prima cifra dopo il punto decimale.
Si dovrà quindi scrivere:

$R_T = R_1 + R_2 = 48.3\ \Omega$

2) Si vogliono determinare, e riportare col corretto numero di cifre significative, la potenza assorbita e la resistenza di un carico elettrico che, alimentato in tensione continua, risulta sottoposto alla tensione U e attraversato dalla corrente I, i cui valori possono essere entrambi rappresentati con quattro cifre significative (con incertezza di ± 2 *digit*):

$U = 10.45$ V ; $I = 27.70$ mA

Soluzione

- La potenza assorbita risulta:

$P = U \cdot I = (10.45)\cdot(27.70\cdot 10^{-3})$ W $= 0.289465$ W

Poiché però il risultato può essere riportato, seguendo il criterio semplificato, con un'accuratezza che è al massimo quella dei suoi fattori, dobbiamo scrivere solo quattro cifre significative, curando l'arrotondamento. Il valore corretto sarà pertanto:

$P = 2.895\cdot 10^{-1}$ W $= 289.5$ mW

Applicando il criterio generale, quindi passando per la valutazione dell'incertezza composta u_P, avremmo ottenuto:

$$u_P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)^2 u_U^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)^2 u_I^2} = \sqrt{I^2 u_U^2 + U^2 u_I^2} =$$

$$= \sqrt{(27.7\cdot 10^{-3})^2 \cdot (2\cdot 10^{-2})^2 + (10.45)^2 \cdot (2\cdot 10^{-5})^2} \cong 6\cdot 10^{-4}\,\mathrm{W}$$

Quindi, poiché l'incertezza è dell'ordine dei decimi di millesimo di watt, l'espressione scritta precedentemente risulta corretta.

- La resistenza del carico risulta:

$R = U/I = 10.45/(27.70\cdot 10^{-3})\ \Omega = 377.2563\ \Omega$

In questo caso applichiamo direttamente il criterio generale, e quindi valutiamo preliminarmente l'incertezza u_R con la regola della composizione quadratica delle incertezze:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 u_U^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 u_I^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u_U^2 + \left(-\frac{U}{I^2}\right)^2 u_I^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{27.7\cdot 10^{-3}}\right)^2 (2\cdot 10^{-2})^2 + \left(-\frac{10.45}{(27.7\cdot 10^{-3})^2}\right)^2 (2\cdot 10^{-5})^2} \cong 7.7\cdot 10^{-1}\Omega$$

Dal momento che l'incertezza ricade sui decimi di ohm, si dovrà scrivere:

$R = 377.3\ \Omega$