

Appendice Analisi in frequenza dei segnali

1 - Segnali periodici

Sviluppo in serie di Fourier

Un segnale è periodico nel tempo quando si ripete ogni T secondi.

Si veda, come esempio, il segnale $s(t)$ in Fig.1.1 dove T è il periodo.

Un segnale periodico può essere, in generale, caratterizzato nel seguente modo:

$$s(t) = s(t + iT) \tag{1.1}$$

L'indice $i = 1, 2, 3 \dots$ rappresenta la replica del segnale elementare che si succede identica nel tempo, ogni periodo di T secondi.

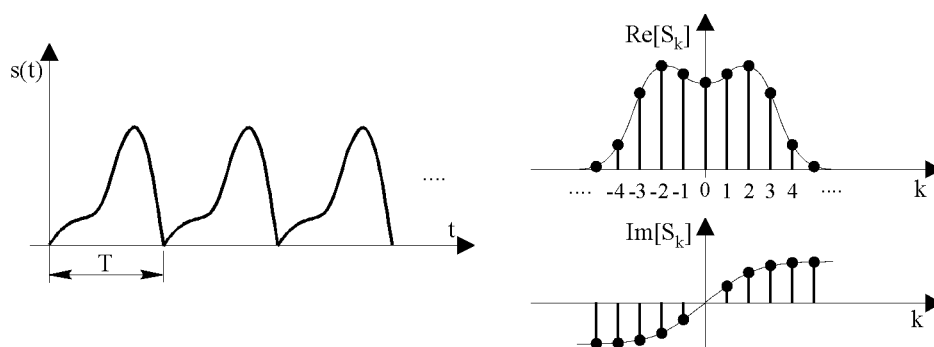


Fig1.1 - Segnale periodico $s(t)$ e coefficienti S_k dello sviluppo in serie di Fourier.

Se T è il periodo, $f_1 = 1/T$ è frequenza fondamentale, $\omega_1 = 2\pi f_1$ è pulsazione fondamentale.

Per i segnali periodici la rappresentazione più usata nel dominio della frequenza è costituita dalla scomposizione in serie di Fourier, mediante componenti armoniche a frequenze kf_1 multiple della frequenza fondamentale f_1 .

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{j2\pi k f_1 t} \tag{1.2}$$

Valutazione dei coefficienti dello sviluppo in serie

I coefficienti S_k dello sviluppo in serie di Fourier possono essere determinati moltiplicando membro a membro l'Eq.1.2 per la funzione $\exp(-j2\pi k' f_1 t)$ e mediando nel periodo T .

Al secondo membro risulteranno pertanto termini del tipo $\exp[j2\pi(k-k')f_1 t]$.

Valutiamo quindi la media di questi termini nel periodo T . Se k' è diverso da k , la media di una funzione sinusoidale in un tempo multiplo intero del periodo T è sempre nulla.

Se viceversa $k' = k$, otterremo un risultato diverso da zero e pari a uno.

Tenuto conto di questi fatti si ha:

$$\begin{aligned}
 S_k &= \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T} \int_T s(t) \cos(2\pi k f_1 t) dt - j \frac{1}{T} \int_T s(t) \sin(2\pi k f_1 t) dt = \\
 &= \operatorname{Re}[S_k] + j \operatorname{Im}[S_k] = [|S_k|, \varphi_k]
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Spettro bilatero

I coefficienti S_k dello sviluppo in serie di Fourier risultano quindi quantità complesse. L'insieme di tali coefficienti, rappresentati in funzione delle frequenze discrete $k f_1$ o più semplicemente in funzione dell'ordine k della generica armonica, è lo spettro a righe del segnale periodico $s(t)$.

Lo spettro di parte reale $\operatorname{Re}[S_k]$ è una funzione pari della frequenza, mentre lo spettro di parte immaginaria $\operatorname{Im}[S_k]$ è una funzione dispari.

Dalla conoscenza degli spettri di parte reale ed immaginaria si deducono anche gli spettri di modulo e fase, $|S_k|$ e φ_k , che presentano le stesse caratteristiche di simmetria.

Tali condizioni di simmetria si possono anche esprimere brevemente, introducendo la forma coniugata, indicata con l'asterisco (*):

$$S_{-k} = S_k^*
 \tag{1.4}$$

La serie esponenziale utilizza anche le frequenze negative. Tali frequenze sono tuttavia prive di significato fisico. Il loro impiego nella pratica costituisce solamente una rappresentazione analitica comoda e compatta. Per tale serie si usa spesso il termine di spettro bilatero.

Sviluppo in serie trigonometrica

Lo spettro bilatero presenta caratteristiche di simmetria, valide sia per la rappresentazione con parte reale ed immaginaria ($\operatorname{Re}[S_k]$ $\operatorname{Im}[S_k]$), sia per la rappresentazione in modulo e fase ($|S_k|$ φ_k). Tenendo conto di queste proprietà si ottengono sviluppi con funzioni trigonometriche.

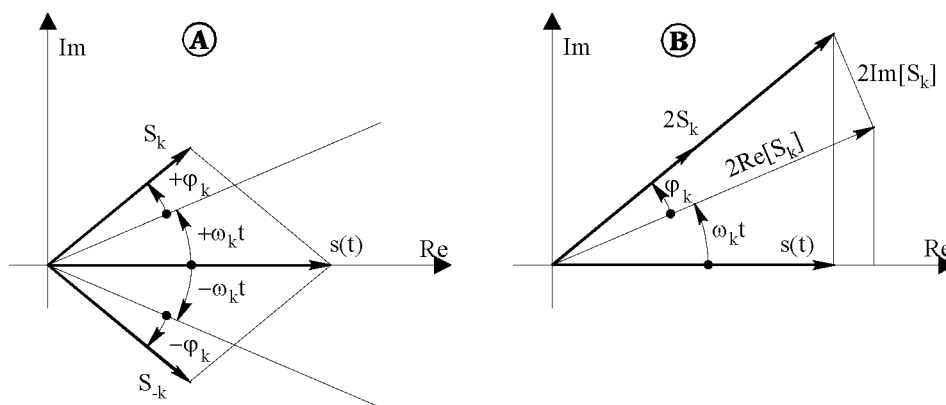


Fig.1.2 - Rappresentazioni vettoriali dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier.

Infatti, osservando la Fig.1.2A, dove è data un'interpretazione vettoriale di una generica coppia di termini della serie esponenziale, per le frequenze $\pm \omega_k = \pm 2\pi k f_1$, si deduce:

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|S_k| \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (1.5)$$

che contiene solo indici k positivi. Inoltre, con riferimento alla Fig.1.2B, se poniamo:

$$A_k = 2 \operatorname{Re}[S_k] = \frac{2}{T} \int_T s(t) \cos(2\pi k f_1 t) dt$$

$$B_k = -2 \operatorname{Im}[S_k] = \frac{2}{T} \int_T s(t) \sin(2\pi k f_1 t) dt \quad (1.6)$$

si ottiene il noto sviluppo in termini di seno e coseno:

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t] \quad (1.7)$$

Segnale a onda rettangolare

Come esempio di rappresentazione in frequenza di un segnale periodico, si consideri l'onda quadra $s(t)$ di Fig.1.3, ottenuta replicando ogni T secondi un impulso rettangolare di ampiezza A e durata τ . Il segnale si può scrivere nella forma:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A \cdot \operatorname{rect}_{\tau}(t - iT) \quad (1.8)$$

Le componenti del suo spettro bilatero risultano:

$$S_k = \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} A e^{-j2\pi k f_1 t} dt$$

$$= \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-j2\pi k f_1 t}}{-j2\pi k f_1} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{A}{T} \tau \frac{\sin \pi k f_1 \tau}{\pi k f_1 \tau} = Q f_1 \frac{\sin \pi k f_1 \tau}{\pi k f_1 \tau} \quad (1.9)$$

essendo: $Q=A\tau$ l'area dell'impulso rettangolare elementare.

Nell'esempio riportato in Fig.1.3 si è scelto $\tau = T/2$.

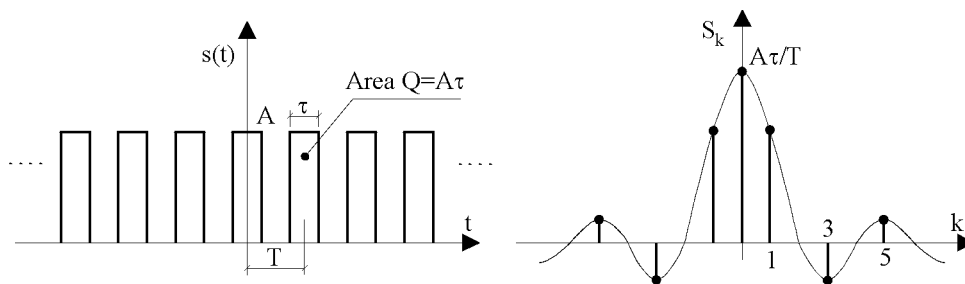


Fig.1.3 - Segnale rettangolare e suo spettro.

Sequenza di impulsi matematici

Poniamo, nell'esempio precedente, l'ampiezza $A=1/\tau$.

Riducendo la durata τ dell'impulso elementare, si perviene a un caso limite particolarmente significativo dell'onda rettangolare, il treno di impulsi matematici:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t-iT) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau} \text{rect}_{\tau}(t-iT) \tag{1.10}$$

dove l'ampiezza $A=1/\tau$ diverge al limite per $\tau \rightarrow 0$, mentre l'area Q dell'impulso matematico elementare rimane costante e di valore pari ad uno (Fig.1.4).

Lo spettro della sequenza di impulsi matematici di area unitaria e frequenza f_1 si ottiene quindi passando al limite le componenti S_k dell'Eq.1.9 per $\tau \rightarrow 0$, mantenendo l'area Q dell'impulso elementare pari a uno.

Risultano pertanto componenti armoniche tutte uguali, con valore reale $S_k=f_1$.

Sussiste in definitiva, per una sequenza di impulsi matematici, lo sviluppo in serie:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t-iT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_1 e^{j2\pi k f_1 t} \tag{1.11}$$

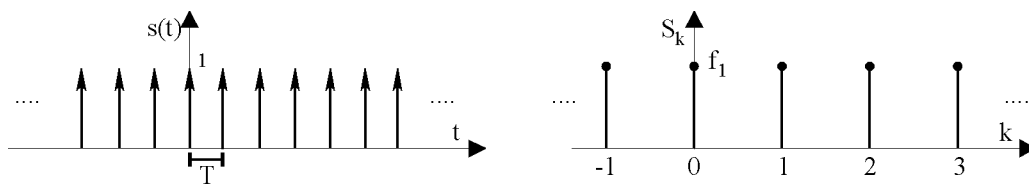


Fig.1.4 - Sequenza di impulsi matematici e coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier.

2 - Segnali aperiodici

I segnali aperiodici sono caratterizzati dall'aver energia finita. Per tale fatto sono detti anche segnali impulsivi, diversamente dai segnali periodici che si ripetono indefinitamente.

In Fig.2.1 è riportato, come esempio, un segnale $s(t)$ con durata limitata.

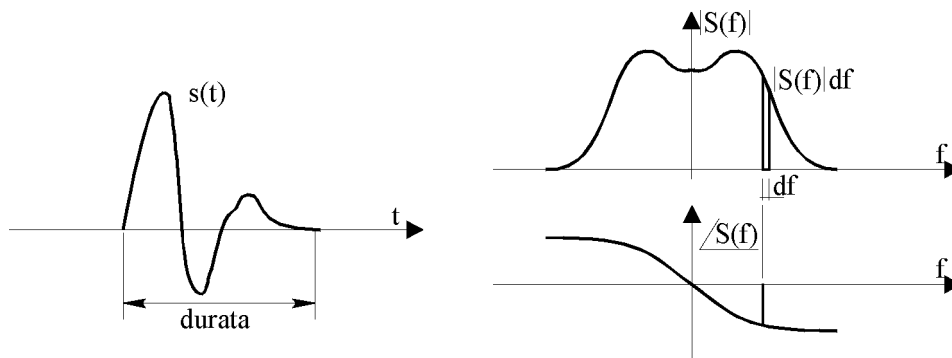


Fig.2.1 - Segnale aperiodico e suo spettro.

Per i segnali aperiodici perde significato lo sviluppo in serie di Fourier, mancando il principale presupposto: la periodicità. Per i segnali impulsivi, l'analisi in frequenza viene condotta mediante la trasformata (diretta e inversa) di Fourier.

Trasformata e antitrasformata di Fourier

I segnali aperiodici sono caratterizzati in frequenza tramite la trasformata di Fourier $S(f)$. Mediante l'antitrasformata si ricostruisce viceversa il segnale nel tempo $s(t)$:

$$\left. \begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathfrak{T}[s(t)] \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df = \mathfrak{T}_{-1}[S(f)] \end{aligned} \right\} s(t) \Leftrightarrow S(f) \quad (2.1)$$

Poichè la trasformata di Fourier $S(f)$ è una funzione continua nel dominio della frequenza, esiste un'infinità di componenti armoniche di ampiezza infinitesima $|S(f)|df$ e fase $\angle S(f)$.

Proprietà sulle aree

La componente continua dello spettro $S(f)$ rappresenta l'area sottesa dal segnale $s(t)$ nel dominio del tempo, mentre l'area sottesa dallo spettro fornisce l'ordinata all'origine del segnale nel tempo. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} S(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = \text{area di } s(t) \\ s(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f \cdot 0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df = \text{area di } S(f) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Spettro dell'impulso rettangolare

Applicando la definizione di trasformata di Fourier all'impulso rettangolare di Fig.2.2, con ampiezza A e durata τ (area $Q=A\tau$), si ottiene:

$$s(t) = A \cdot \text{rect}_{\tau}(t) \Leftrightarrow S(f) = A\tau \frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau} \quad (2.3)$$

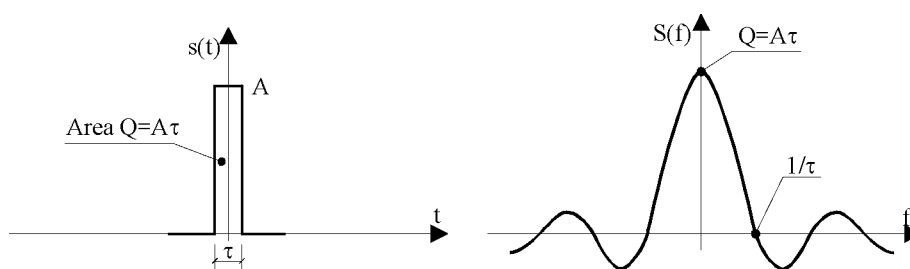


Fig.2.2 - Impulso rettangolare e suo spettro.

L'impulso matematico

Lo spettro di un impulso matematico temporale di area unitaria ($Q=1$) si ottiene passando al limite ($\tau \rightarrow 0$) la durata dell'impulso rettangolare, mantenendone costante l'area ($A=1/\tau \rightarrow \infty$). Estrapolando gli andamenti di Fig.2.2 si vede che lo spettro si riduce a una costante per tutte le frequenze con valore pari all'area unitaria ($Q=1$).

Lo spettro dell'impulso matematico ha quindi un'estensione infinitamente ampia:

$$\mathfrak{T}[\delta(t)] = 1 = \text{costante} \quad \forall f \quad (2.4)$$

È vero anche il duale: a una costante di valore unitario nel tempo corrisponde un impulso

matematico nel dominio della frequenza:

$$\mathfrak{F}[1, \forall t] = \delta(f) \tag{2.5}$$

Si conferma che un segnale costante nel tempo presenta solo una componente continua in frequenza.

Dualità tempo-frequenza

Per un segnale nel tempo di tipo reale, lo spettro di modulo $|S(f)|$ è una funzione pari, mentre lo spettro di fase $\angle S(f)$ è una funzione dispari.

Se, come caso particolare, il segnale nel tempo oltre che reale è anche pari, consegue che lo spettro $S(f)$ si riduce al solo spettro di modulo $|S(f)|$, mentre lo spettro di fase $\angle S(f)$ è identicamente nullo.

In tal caso sussiste l'intercambiabilità fra le variabili t ed f .

Utilizzando la proprietà di dualità si può determinare immediatamente l'andamento temporale che corrisponde a uno spettro rettangolare in frequenza. Infatti, dato lo spettro rettangolare in frequenza, rappresentato in Fig.2.3, dove f_M rappresenta la larghezza di banda dello spettro, il segnale corrispondente nel tempo risulta del tipo $\sin(x)/x$.

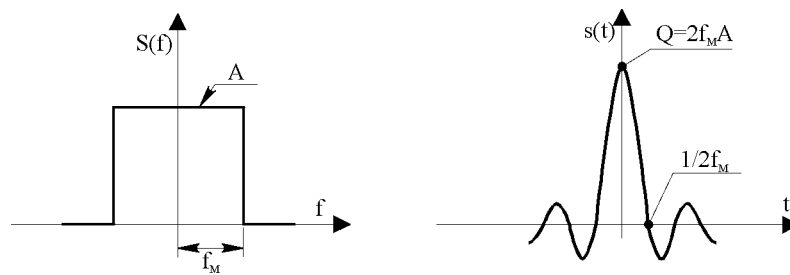


Fig.2.3 - Spettro rettangolare e corrispondente segnale nel tempo, $\sin(x)/x$.

Proprietà di traslazione

La traslazione di un segnale *nel tempo* della quantità t_0 introduce una variazione lineare di fase nello spettro del segnale originario. Infatti:

$$\begin{aligned} s(t - t_0) &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \quad [\text{posto : } \alpha = t - t_0] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha) e^{-j2\pi f(\alpha + t_0)} d\alpha = S(f) e^{-j2\pi ft_0} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Traslare uno spettro *in frequenza* di una quantità f_0 fa perdere le caratteristiche di simmetria rispetto all'origine, con la conseguenza che il segnale nel tempo non è più reale. Infatti:

$$\begin{aligned} S(f - f_0) &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} S(f - f_0) e^{j2\pi ft} dt = \quad [\text{posto : } \beta = f - f_0] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\beta) e^{-j2\pi(\beta + f_0)t} d\beta = s(t) e^{j2\pi f_0 t} \end{aligned} \tag{2.7}$$

D'altra parte, traslando lo spettro originario della stessa quantità $\pm f_0$ sia a destra che a sinistra dell'origine, il segnale corrispondente (a causa della ripristinata simmetria in frequenza) risulta reale. Si ottiene infatti:

$$S(f - f_0) + S(f + f_0) \Leftrightarrow s(t) e^{j2\pi f_0 t} + s(t) e^{-j2\pi f_0 t} = 2s(t) \cos(2\pi f_0 t) \tag{2.8}$$

Questa operazione corrisponde a moltiplicare il segnale originario $s(t)$ nel tempo per un'oscillazione cosinusoidale di frequenza f_0 .

3 - Trasformata di Fourier di segnali periodici

Si è mostrato che per un segnale periodico esiste lo sviluppo in serie di Fourier. Ciascun termine della serie è una costante S_k moltiplicata per un esponenziale. Allora:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \mathfrak{F}[S_k] &= S_k \delta(f) \\
 \text{b) } \mathfrak{F}[S_k e^{j2\pi k f_1 t}] &= S_k \delta(f - k f_1) \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

quindi $\mathfrak{F}[s(t)] = \mathfrak{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{j2\pi k f_1 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k \delta(f - k f_1)$

Infatti:

- a) la trasformata di Fourier di una costante S_k è un impulso matematico,
 - b) la presenza di un esponenziale si traduce in una traslazione in frequenza:
- Si conclude che anche per i segnali periodici esiste la trasformata di Fourier, seppure in senso limite. Questa conclusione è interessante in quanto consente di utilizzare le trasformate di Fourier, oltre che per i segnali aperiodici, anche per quelli periodici, consentendo di unificare il metodo di trattamento dei segnali nel dominio della frequenza, laddove ciò appaia conveniente.

Trasformata di Fourier del treno di impulsi matematici

Si consideri infine il treno di impulsi matematici $c(t)$, con periodo T_c e ampiezza unitaria, come rappresentato in Fig.3.1.

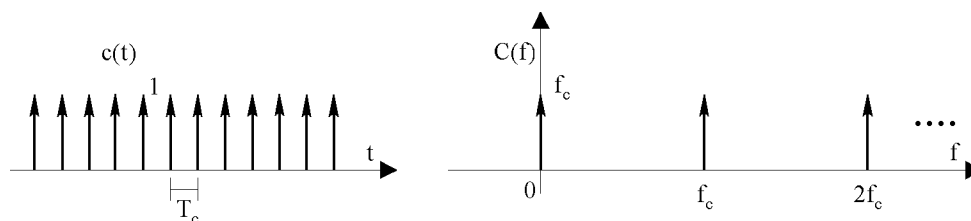


Fig.3.1 - Sequenza di impulsi matematici e relativa trasformata di Fourier.

Questo segnale, in quanto periodico, può essere sviluppato in serie di Fourier e, per quanto appena visto, presenta anche la trasformata di Fourier. Risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 c(t) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c e^{j2\pi k f_c t} \\
 C(f) &= \mathfrak{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c e^{j2\pi k f_c t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c \delta(f - k f_c)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si conclude che un treno di impulsi nel tempo è rappresentato da un treno di impulsi anche in frequenza (vedi Fig.3.1). Tale risultato è utile nella trattazione dei segnali campionati. Il campionamento infatti rappresenta il primo passo per l'elaborazione digitale dei segnali.