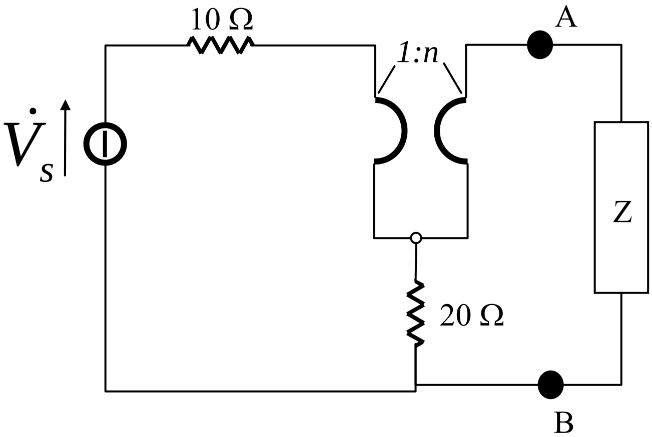
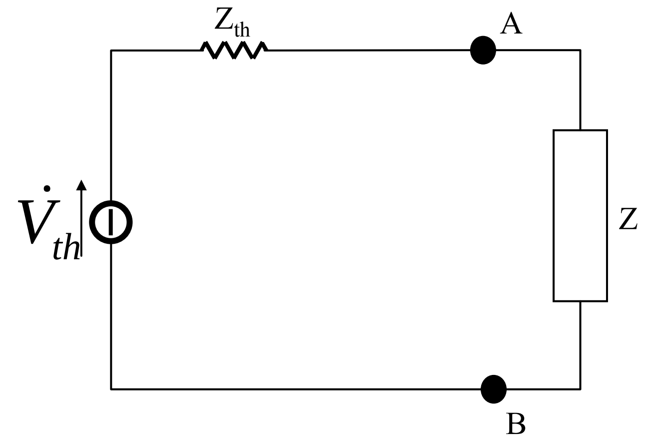
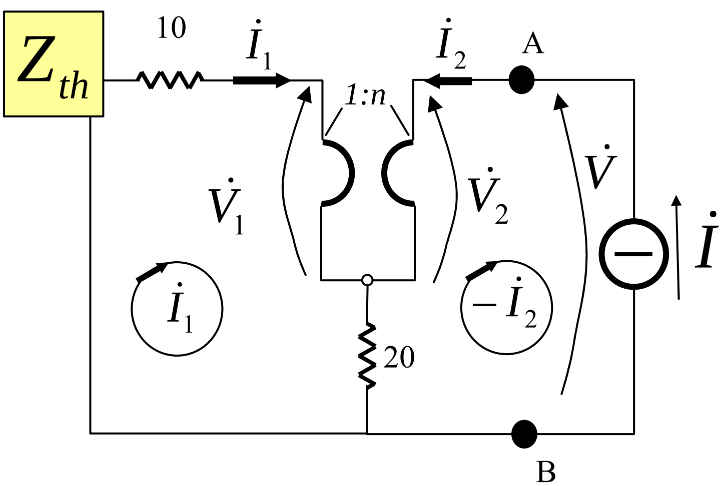
# Esercizi & Domande per il Compito di Elettrotecnica del 16 gennaio 2007

Il circuito in figura è in regime sinusoidale.
Determinare il valore di $n$ che causa l'erogazione della massima potenza al carico Z=7.5 Ω.




Dato l'equivalente di Thevenin della rete a sinistra dei morsetti AB, il massimo trasferimento di potenza si ha quando $Z_{th}=Z^*$, ovvero, essendo Z reale, quando $Z_{th}$=7.5Ω.




$$Z_{th} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I};$$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \dfrac{1}{n}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_1 = -n\dot{I}_2 = -n\dot{I} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 - \dot{V} \end{bmatrix}$$

$$-30n\dot{I} + 20\dot{I} = -\dot{V}_1 \rightarrow \text{moltiplico per } n: \quad -30n^2\dot{I} + 20n\dot{I} = -n\dot{V}_1$$

$$20n\dot{I} - 20\dot{I} = \dot{V}_2 - \dot{V} = n\dot{V}_1 - \dot{V}$$

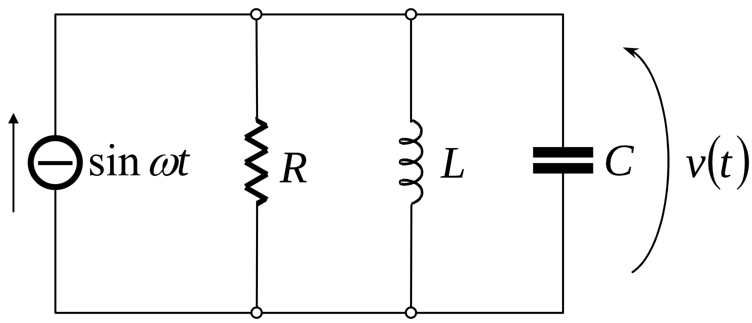
$$\text{Sommando m. a m.} \quad -30n^2\dot{I} + 20n\dot{I} + 20n\dot{I} - 20\dot{I} = -\dot{V}$$

$$Z_{th} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = 30n^2 - 40n + 20$$

Imponendo $Z_{th}$=7.5, si ha $\quad n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{6} \end{cases}$

# Elettrotecnica 2

## Esercizio N° 1




Sia R=50Ω; L=0.1mH; C=4μF.

Ricavare il valore della pulsazione ω in corrispondenza della quale l'ampiezza della tensione *v(t)* è massima.

Calcolare il rapporto fra l'energia immagazzinata e quella dissipata in un periodo, alla risonanza e verificare che tale rapporto è pari a $\frac{Q_0}{2\pi}$, dove $Q_0$è il fattore di merito del circuito

**Svolgimento**

Siamo in presenza di un circuito RLC parallelo. La tensione ai capi del parallelo sarà massima in condizioni di risonanza, quindi alla pulsazione $\omega = \omega_0$ .

$$\boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.1 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}} = 50000 \frac{rad}{s}}$$

La potenza dissipata nel resistore vale $P = RI_R^2$

In condizioni di risonanza la corrente $\overline{I}_R$ è pari alla corrente erogata dal generatore in quanto l'induttore in parallelo al condensatore si comportano come un circuito aperto.

$$\overline{I}_R = -j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad P = 50 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 25W$$

$$\boxed{Q_0 = \omega_0 RC = 50000 \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 10} \text{ (adimensionale)}$$

Si può verificare che $\frac{Q_0}{2\pi}$ è pari al rapporto fra l'energia immagazzinata e quella dissipata in un periodo, alla risonanza.

L'energia immagazzinata nell'induttore è: $\omega_L = \frac{1}{2} L i_L^2$

Quella immagazzinata nel capacitore è: $\omega_C = \frac{1}{2} C v^2$

Poiché è $v(t) = R \cdot i_R(t) = 50 \cdot \sin(\omega_0 t) \longrightarrow \overline{V} = -j50$

$$\overline{I_L} = \frac{\overline{V}}{j\omega L} = \frac{-j50}{j \cdot 50000 \cdot 0.1 \cdot 10^{-3}} = -10 \quad \rightarrow \quad i_L(t) = -10\cos(\omega_0 t)$$

$$\omega_L = \frac{1}{2} L i_L^2(t) = \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot \cos^2(\omega_0 t) = 0.005\cos^2(\omega_0 t)$$

$$\omega_C = \frac{1}{2} C v^2(t) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 2500 \cdot \sin^2(\omega_0 t) = 0.005\sin^2(\omega_0 t)$$

L'energia immagazzinata è: $\omega_C + \omega_L = 0.005\left(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)\right) = 0.005J = 5mJ$

L'energia dissipata in un periodo è: $\omega_R = P \cdot T$

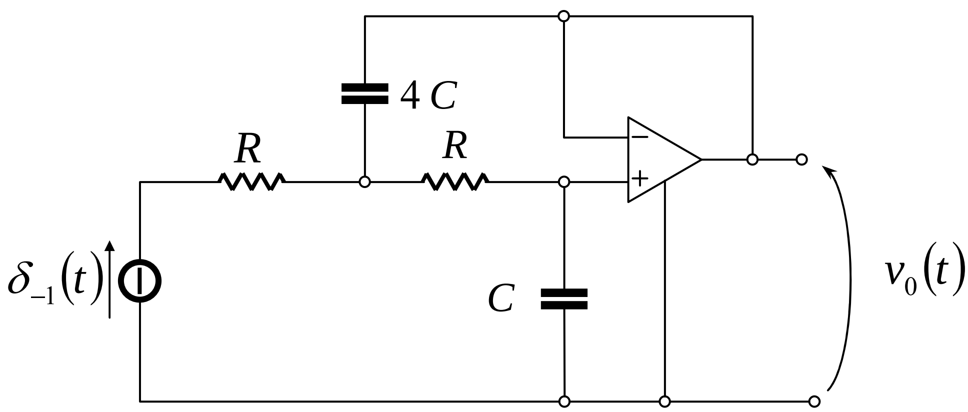
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{50000} = 1.257 \cdot 10^{-4} s \qquad \omega_R = 25 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\boxed{\frac{\omega_C + \omega_L}{\omega_R} = \frac{\omega_{imm}}{\omega_{diss}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi} = \frac{10}{2\pi} = \frac{Q_0}{2\pi}} \longrightarrow$$ **Verificato**

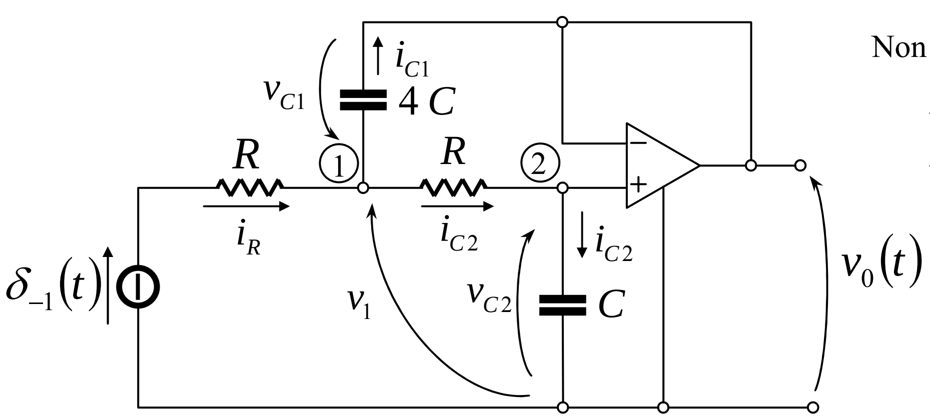
# Elettrotecnica 2

## Esercizio N° 2

Ricavare la risposta al gradino unitario, considerando come uscita la tensione $v_0(t)$.
Le condizioni iniziali sono nulle.




**Svolgimento**




Non ci sono condizioni patologiche.

$$v_{C1}(0^-) = 0 \quad \rightarrow \quad v_{C1}(0^+) = 0$$
$$v_{C2}(0^-) = 0 \quad \rightarrow \quad v_{C2}(0^+) = 0$$

- Per **t > 0**

Eq.ne al nodo 1

$$\frac{1 - v_1}{R} - 4C\frac{dv_{C1}}{dt} - \frac{v_1 - v_0}{R} = 0 \qquad \text{con} \qquad v_{C1} = v_1 - v_0 \rightarrow \frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_0}{dt}$$

$$\frac{1 - v_1}{R} - 4C\frac{dv_1}{dt} + 4C\frac{dv_0}{dt} - \frac{v_1}{R} + \frac{v_0}{R} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R} - \frac{2v_1}{R} - 4C\frac{dv_1}{dt} + 4C\frac{dv_0}{dt} + \frac{v_0}{R} = 0$$

Eq.ne al nodo 2

$$\frac{v_1 - v_0}{R} = C\frac{dv_0}{dt} \quad \rightarrow \quad v_1 = RC\frac{dv_0}{dt} + v_0 \qquad\qquad \frac{dv_1}{dt} = RC\frac{d^2v_0}{dt^2} + \frac{dv_0}{dt}$$

da cui
$$\frac{1}{R} - \frac{2}{R}\left(RC\frac{dv_0}{dt} + v_0\right) - 4C\left(RC\frac{d^2v_0}{dt^2} + \frac{dv_0}{dt}\right) + 4C\frac{dv_0}{dt} + \frac{v_0}{R} = 0$$

$$-4RC^2\frac{d^2v_0}{dt^2} - \left(2C\frac{dv_0}{dt} + \cancel{4C\frac{dv_0}{dt}} - \cancel{4C\frac{dv_0}{dt}}\right) - \left(\frac{2}{R}v_0 - \frac{v_0}{R}\right) + \frac{1}{R} = 0$$

$$4RC^2\frac{d^2v_0}{dt^2} + 2C\frac{dv_0}{dt} + \frac{v_0}{R} = \frac{1}{R}$$

$$4R^2C^2\frac{d^2v_0}{dt^2} + 2RC\frac{dv_0}{dt} + v_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4R^2C^2\lambda^2 + 2RC\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RC \mp \sqrt{R^2C^2 - 4R^2C^2}}{4R^2C^2} = \frac{-RC \mp \sqrt{-3R^2C^2}}{4R^2C^2} = \begin{cases} \dfrac{-RC - j\sqrt{3}RC}{4R^2C^2} \\ \dfrac{-RC + j\sqrt{3}RC}{4R^2C^2} \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \mp j\sqrt{3}}{4RC} = \frac{-1}{4RC} \mp j\frac{\sqrt{3}}{4RC}$$

$$v_0(t) = e^{-\frac{1}{4RC}t}\left[A\cos\frac{\sqrt{3}}{4RC}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{4RC}t\right] + k \qquad v_{0p} = k \qquad k = 1$$

Stato in $(0^+)$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} v_{C1}(0^+) = v_{C1}(0^-) = 0 \\ v_{C2}(0^+) = v_{C2}(0^-) = 0 \end{cases}$

- Condizioni iniziali:

$$\boxed{v_0(0^+) = v_{C2}(0^+) = 0}$$

$$v_1 - v_{C2} = v_{C1} \quad \rightarrow \quad v_1 = v_{C1} + v_{C2}$$

essendo $v_1 = RC\dfrac{dv_0}{dt} + v_0$ $\qquad RC\dfrac{dv_0}{dt} = v_{C1} + \cancel{v_{C2}} - \cancel{v_0}$ $\qquad \boxed{\left.\dfrac{dv_0}{dt}\right|_{0^+} = 0}$

Applicando le condizioni iniziali:

$$0 = A + 1 \quad \rightarrow \quad A = -1$$

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{1}{4RC} e^{-\frac{1}{4RC}t} \left[ A\cos\frac{\sqrt{3}}{4RC}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{4RC}t \right] +$$

$$+ e^{-\frac{1}{4RC}t} \left[ -A\frac{\sqrt{3}}{4RC}\sin\frac{\sqrt{3}}{4RC}t + B\frac{\sqrt{3}}{4RC}\cos\frac{\sqrt{3}}{4RC}t \right]$$

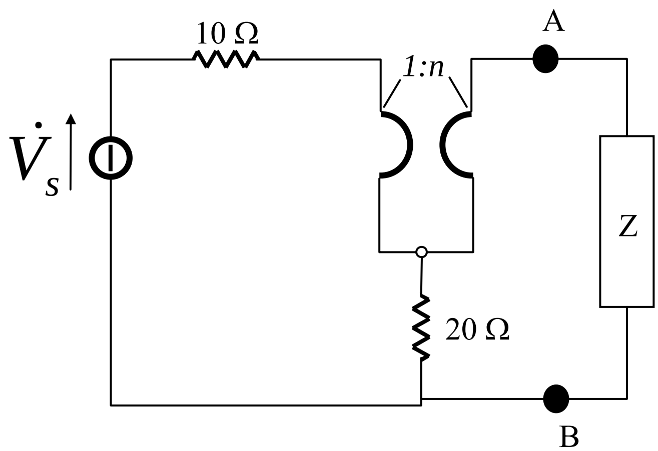
$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{A}{4RC} + B\frac{\sqrt{3}}{4RC} \qquad \rightarrow \qquad 0 = 1 + B\sqrt{3} \qquad \rightarrow \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{v_0(t) = -e^{-\frac{1}{4RC}t} \left[ \cos\frac{\sqrt{3}}{4RC}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{4RC}t \right] + 1}$$

**Prova Scritta di Elettrotecnica 1 – 16 Gennaio 2007 Ing. Elettronica**

**Nome: ________________ Cognome: __________________ Mtr: ________**

**1.** Il circuito in figura è in regime sinusoidale.
Determinare il valore di *n* che causa l'erogazione della massima potenza al carico $Z$=7.5 Ω.

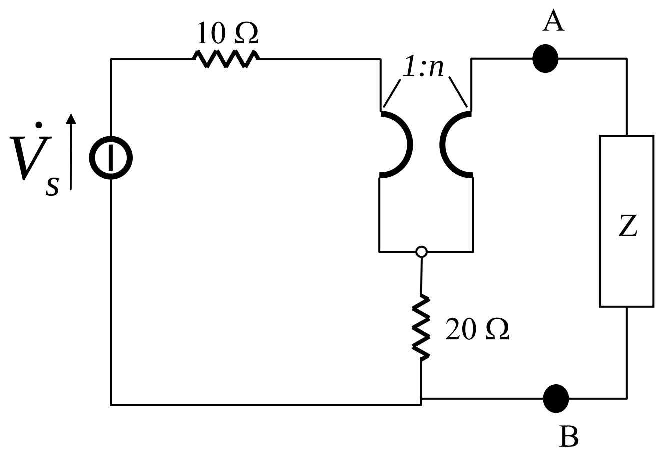



**2.** Enunciare e dimostrare il teorema del massimo trasferimento di potenza in regime sinusoidale

**Prova Scritta di Elettrotecnica 1 – 16 Gennaio 2007 Ing. Elettrica**

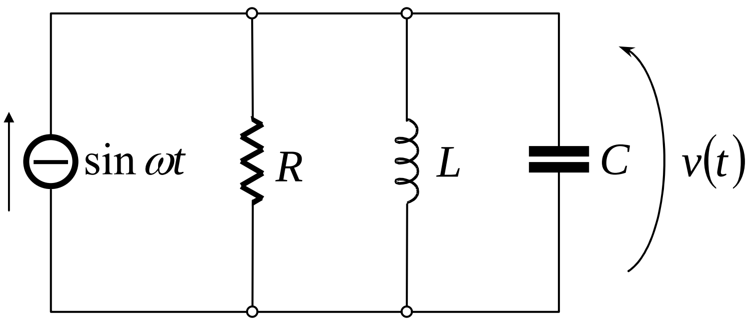
**Nome: ________________ Cognome: __________________ Mtr: ________**

**1.** Il circuito in figura è in regime sinusoidale.
Determinare il valore di *n* che causa l'erogazione della massima potenza al carico *Z*=7.5 Ω.




**2.** Enunciare e dimostrare il teorema del massimo trasferimento di potenza in regime sinusoidale

**Prova Scritta di Elettrotecnica 2 – 16 Gennaio 2007 Ing. Elettronica**
**Nome: ________________ Cognome: __________________ Mtr: ________**



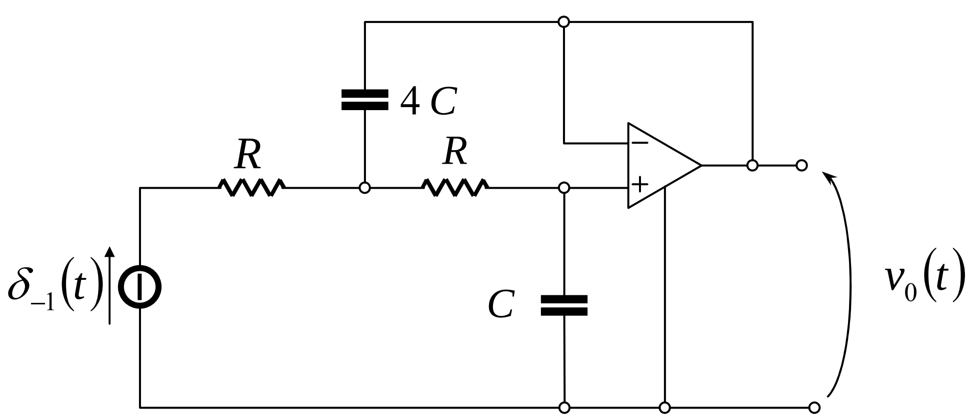

Sia R=50Ω; L=0.1mH; C=4μF.

Ricavare il valore della pulsazione ω in corrispondenza della quale l'ampiezza della tensione *v(t)* è massima.

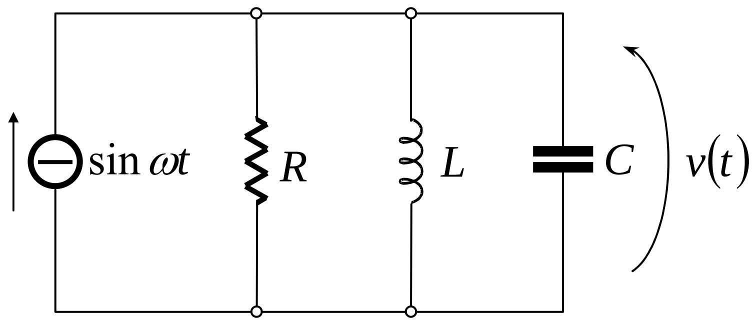
Calcolare il rapporto fra l'energia immagazzinata e quella dissipata in un periodo, alla risonanza e verificare che tale rapporto è pari a $\frac{Q_0}{2\pi}$, dove $Q_0$ è il fattore di merito del circuito

---

Ricavare la risposta al gradino unitario, considerando come uscita la tensione $v_0(t)$.
Le condizioni iniziali sono nulle.



**Prova Scritta di Elettrotecnica 2 – 16 Gennaio 2007 Ing. Elettrica**
**Nome: ________________ Cognome: __________________ Mtr: ________**




Sia R=50Ω; L=0.1mH; C=4μF.

Ricavare il valore della pulsazione ω in corrispondenza della quale l'ampiezza della tensione *v(t)* è massima.

Calcolare il rapporto fra l'energia immagazzinata e quella dissipata in un periodo, alla risonanza e verificare che tale rapporto è pari a $\frac{Q_0}{2\pi}$, dove $Q_0$ è il fattore di merito del circuito

---

Ricavare la risposta al gradino unitario, considerando come uscita la tensione $v_0(t)$.
Le condizioni iniziali sono nulle.