Introduzione

Il corso è indirizzato a studenti che affrontano per la prima volta dinamiche non lineari e caos

Mira a far familiarizzare gli studenti con la fenomenologia e lo studio quantitativo, della dinamica dei sistemi complessi e del caos deterministico, presentando problematiche di ricerca attuali e facendone risaltare gli aspetti interdisciplinari.

Le metodologie proposte, sono sviluppate per i circuiti elettrici, e per generici sistemi fisici non lineari.

La matematica è trattata in maniera informale ma piuttosto attenta, evidenziando metodi analitici, esempi e intuizioni geometriche.

Prerequisiti: studi di funzione, serie di Taylor, equazioni differenziali, algebra lineare.

Oggi si riscontra un crescente interesse verso il caos ed i frattali.

Il libro di Gleick, *Chaos*, Gleick 1987, è stato un best-seller per mesi.
Libri come *The Beauty of Fractals*, Peitgen e Richter 1986, si trovano nelle sale d’attesa.
Questo può essere spiegato dalla bellezza delle immagini.

Ma queste idee possono essere applicate a vari problemi nella scienza e nell’ingegneria.

Caos e frattali fanno parte di un più grande soggetto,
la DINAMICA, che ha a che fare con il cambiamento, con i sistemi che evolvono nel tempo.

- I matematici ed i fisici hanno per secoli etichettato i sistemi dinamici come casuali ed impredicibili.

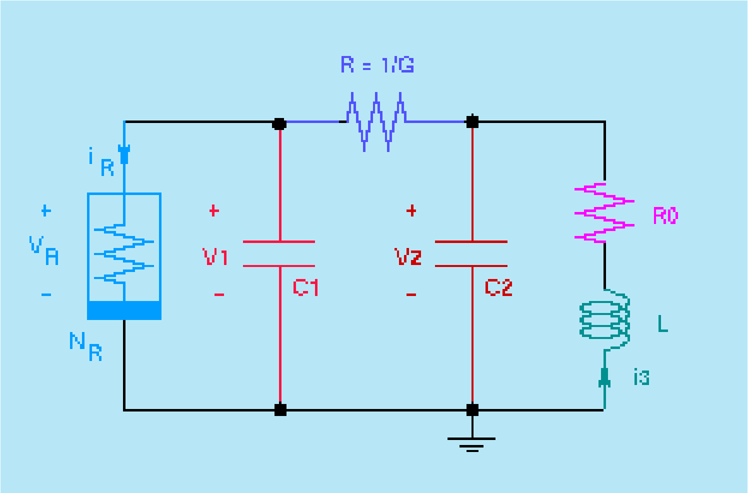
- I soli sistemi compresi nel passato erano quelli che si credeva fossero lineari: equazioni lineari, funzioni lineari, algebra lineare, programmazione lineare, etc..

- Tuttavia il mondo non è neanche lontanamente lineare.

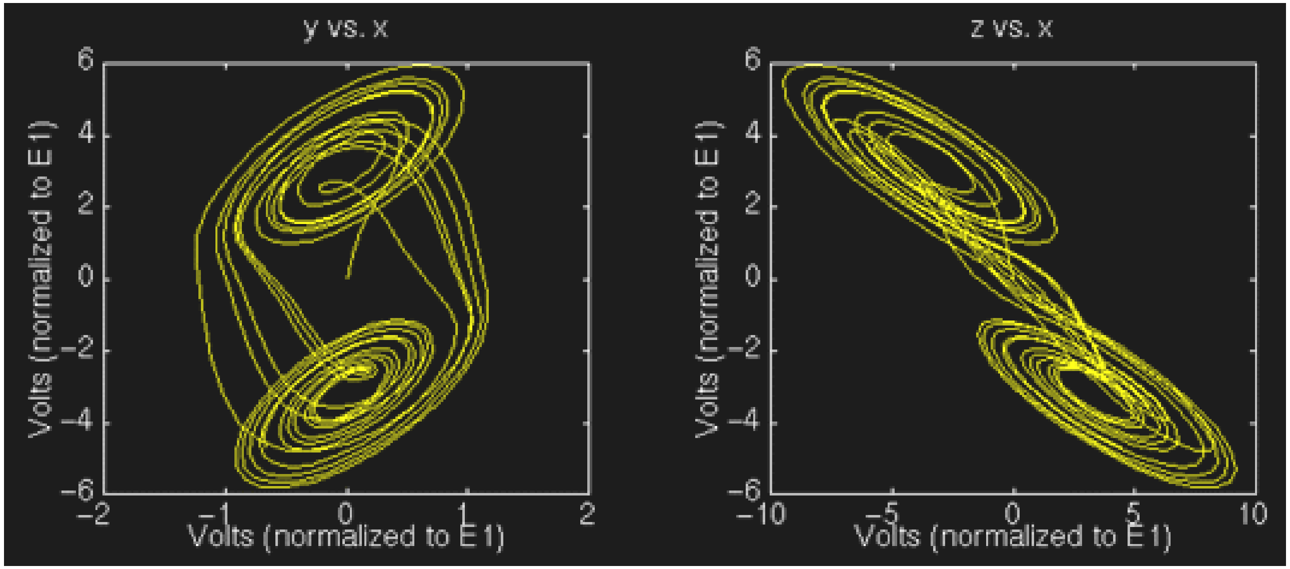
- Gli scienziati hanno raggiunto la consapevolezza di ciò nel 19mo secolo, secolo che ha visto nascere una nuova scienza,

  la teoria del caos

Il circuito di Chua



Un paradigma per la teoria del caos



Sistemi dinamici

Equazioni Differenziali
t continuo

Mappe iterate
(o equazioni alle differenze)
t discreto

- **Ordinarie**: solo una variabile indipendente, ex t
  Oscillatore armonico

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

- **Alle derivate parziali**: più di una variabile indipendente
  Equazione del calore

$$\frac{du}{dt}=\frac{d^2u}{dx^2}$$

Forma generale

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = f_1(x_1,\ldots.,x_n) \\
\dot{x}_2 = f_2(x_1,\ldots.,x_n) \\
. \\
. \\
\dot{x}_n = f_n(x_1,\ldots.,x_n)
\end{cases}
$$

$x_1, \ldots x_n$ tensioni o correnti, concentrazioni in un reattore chimico, popolazioni di diverse specie in un ecosistema, posizioni e velocità di pianeti, etc.

$f_1, \ldots f_n$ dipendono dal problema

Esempio

L'oscillatore smorzato $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$

può essere riscritto nella forma del sistema dinamico, ponendo

$$x_1 = x \qquad m\dot{x}_2 + bx_2 + kx_1 = 0 \qquad \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$
$$x_2 = \dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{b}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

Il sistema è **LINEARE**: le x_i a II membro compaiono solo alla <u>prima potenza</u>.

Altrimenti il sistema è NON LINEARE

Esempio

Il pendolo

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} sen(x) = 0$$

x angolo dalla verticale

g accelerazione di gravità

L lunghezza del pendolo

Il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{L} sen x_1 \end{cases}$$

Sistema **NON LINEARE**

La non linearità rende difficile la risoluzione analitica (funzioni ellittiche).

Per $x << 1$, posto $sen(x) = x$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{L} x_1 \end{cases}$$

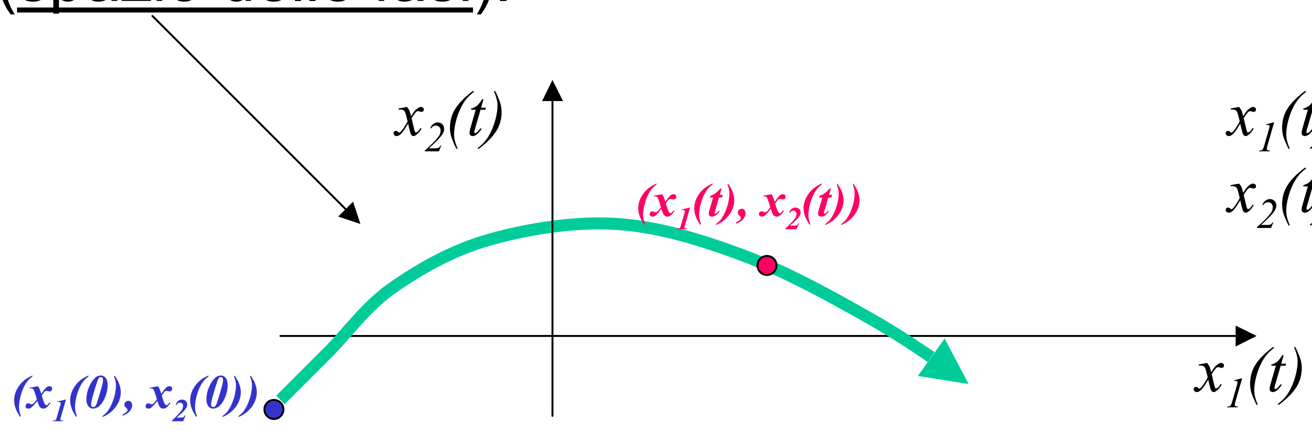
Sistema **LINEARIZZATO**
(facile ma approssimato)
Perdo alcune soluzioni….

E' necessaria una così drastica approssimazione?

Dopotutto il moto del pendolo è semplice:
Bassa energia → oscilla avanti e indietro
Alta energia → fa un giro completo

I metodi geometrici consentono di estrarre questa informazione direttamente dal sistema.

In ogni caso la soluzione $x_1(t)$, $x_2(t)$ è un punto che si muove lungo una curva (traiettoria), nello spazio di coordinate (x_1, x_2) (spazio delle fasi).



$x_1(t)$ posizione
$x_2(t)$ velocità

In generale

$x_1, x_{2,\ldots,} x_n$ spazio delle fasi per un sistema n-dimensionale

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,\ldots,x_n) \\ . \\ . \\ \dot{x}_n = f_n(x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

Sistema **AUTONOMO**
forma non generale
nessuna dipendenza dal tempo

Sistemi non autonomi

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F\cos t$ Oscillatore armonico forzato

Posto $x_3 = t$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = -\dfrac{1}{m}\left(-kx_1 - bx_2 + F\cos x_3\right) \\
\dot{x}_3 = 1
\end{cases}
$$

Sistema **AUTONOMO** tridimensionale

In effetti il sistema è davvero tridimensionale: occorrono 3 numeri, x dx/dt e t per integrare le equazioni.

Un sistema di ordine n dipendente dal tempo è un caso speciale di sistema ($n+1$) dimensionale.

La maggiore parte dei sistemi non lineari non può essere risolta analiticamente.

Perché è più difficile risolvere analiticamente sistemi non lineari rispetto a quelli lineari?

I sistemi lineari possono essere spezzati in più parti.

Ogni parte può essere risolta separatamente e poi le parti possono essere ricombinate insieme (sovrapposizione degli effetti)

Ma la natura è caratterizzata da interazioni non lineari ed il principio di sovrapposizione fallisce.

Esempio: se ascolti due belle canzoni contemporaneamente, non ottieni piacere doppio.

Number of variables →

Nonlinearity ↓	$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$	$n >> 1$	Continuum
Linear	*Growth, decay, or equilibrium* Exponential growth RC circuit Radioactive decay	*Oscillations* Linear oscillator Mass and spring RLC circuit 2-body problem (Kepler, Newton)	Civil engineering, structures Electrical engineering	*Collective phenomena* Coupled harmonic oscillators Solid-state physics Molecular dynamics Equilibrium statistical mechanics	*Waves and patterns* Elasticity Wave equations Electromagnetism (Maxwell) Quantum mechanics (Schrödinger, Heisenberg, Dirac) Heat and diffusion Acoustics Viscous fluids
Nonlinear	Fixed points Bifurcations Overdamped systems, relaxational dynamics Logistic equation for single species	Pendulum Anharmonic oscillators Limit cycles Biological oscillators (neurons, heart cells) Predator-prey cycles Nonlinear electronics (van der Pol, Josephson)	*Chaos* Strange attractors (Lorenz) 3-body problem (Poincaré) Chemical kinetics Iterated maps (Feigenbaum) Fractals (Mandelbrot) Forced nonlinear oscillators (Levinson, Smale) Practical uses of chaos Quantum chaos ?	*The frontier* Coupled nonlinear oscillators Lasers, nonlinear optics Nonequilibrium statistical mechanics Nonlinear solid-state physics (semiconductors) Josephson arrays Heart cell synchronization Neural networks Immune system Ecosystems Economics	*Spatio-temporal complexity* Nonlinear waves (shocks, solitons) Plasmas Earthquakes General relativity (Einstein) Quantum field theory Reaction-diffusion, biological and chemical waves Fibrillation Epilepsy Turbulent fluids (Navier-Stokes) Life