

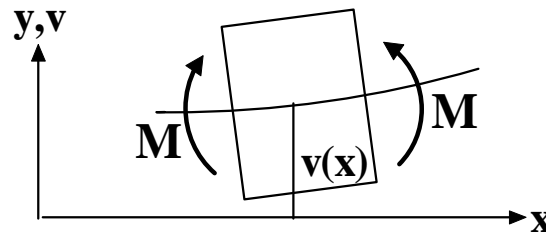
Calcolo della deformata elastica

Metodo della linea elastica

- Si integra l'equazione differenziale del secondo ordine della linea elastica

$$v''(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

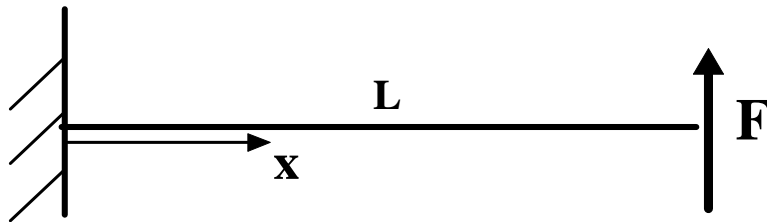
ottenuta con le convenzioni



imponendo le condizioni al contorno corrispondenti ai vincoli fisici

Esempio 1

trave a mensola con carico d'estremità



$$M(x) = F(L - x)$$

$$v''(x) = \frac{F(L - x)}{EI}$$

$$v'(x) = \frac{F(Lx - \frac{x^2}{2})}{EI} + C_1$$

$$v(x) = \frac{F(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})}{EI} + C_1x + C_2$$

condizioni al contorno

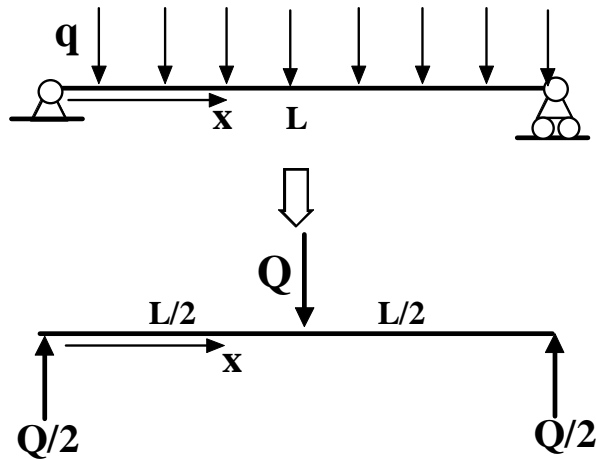
$$v(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0; \quad v'(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$v(L) = \frac{FL^3}{3EI}$$

Esempio 2

trave appoggiata con carico distribuito

- Determinazione delle costanti



$$M(x) = \frac{Q}{2}x - q\frac{x^2}{2}$$

$$v''(x) = \frac{\frac{Q}{2}x - q\frac{x^2}{2}}{EI}; \quad v'(x) = \frac{\frac{Q}{4}x^2 - q\frac{x^3}{6}}{EI} + C_1$$

$$v(x) = \frac{\frac{Q}{12}x^3 - q\frac{x^4}{24}}{EI} + C_1x + C_2$$

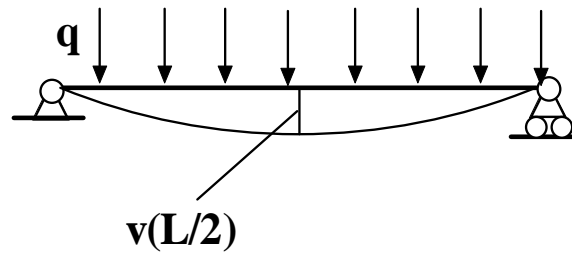
$$v(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0; \quad v(L) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{-\frac{Q}{2}\frac{L^2}{6} + q\frac{L^3}{24}}{EI} = -\frac{QL^2}{24EI}$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Q}{12}x^3 - q\frac{x^4}{24} - \frac{QL^2}{24EI}x \right)$$

Esempio 2

considerazioni sulla linea elastica

- Il valore assoluto massimo dell'inflessione è al centro



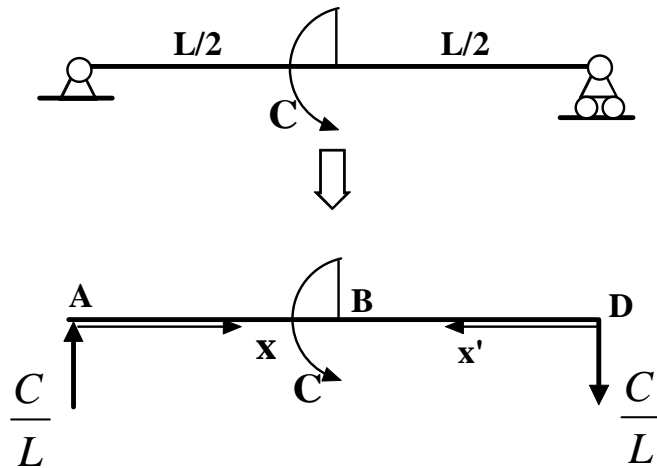
$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5QL^3}{384EI}$$

- La linea elastica risulta simmetrica rispetto al centro

Esempio 3

trave appoggiata con coppia concentrata

- 1) Determinare le reazioni vincolari
- 2) Scrivere le equazioni dell'azione flettente
- 3) Integrare 2 volte l'equazione della linea elastica



AB)

$$M = \frac{C}{L}x$$

$$EIv'_{AB} = \frac{C}{L} \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EIv_{AB} = \frac{C}{L} \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

DB)

$$M = -\frac{C}{L}x'$$

$$EIv'_{DB} = -\frac{C}{L} \frac{x'^2}{2} + C_3$$

$$EIv_{DB} = -\frac{C}{L} \frac{x'^3}{6} + C_3x' + C_4$$

Esempio 3

4) Determinare le costanti d'integrazione con le condizioni di vincolo e di congruenza

Condizioni di vincolo

$$1) v_{AB} = 0 \quad 2) v_{DB} = 0$$

Condizioni di congruenza

$$3) v_{AB} \left(\frac{L}{2} \right) = v_{DB} \left(\frac{L}{2} \right) \quad 4) v'_{AB} \left(\frac{L}{2} \right) = -v'_{DB} \left(\frac{L}{2} \right)$$

dalle 1) e 2)

$$C_2 = C_4 = 0$$

dalle 3) e 4)

$$C_1 + C_3 = 0; \quad C_1 - C_3 = -\frac{CL}{12}$$

quindi

$$C_1 = -C_3 = -\frac{CL}{24}$$

Esempio 3

considerazioni sulla linea elastica

- Le equazioni della linea elastica risultano

$$v_{AB}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Cx^3}{6L} - \frac{CLx}{24} \right)$$
$$v_{DB}(x') = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Cx'^3}{6L} + \frac{CLx'}{24} \right)$$

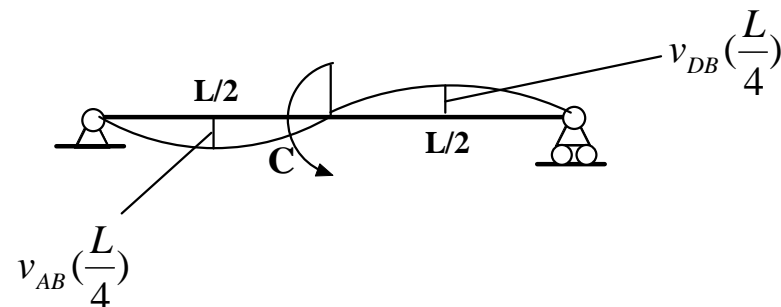
- Quindi si ha

$$v_{AB}\left(\frac{L}{2}\right) = v_{DB}\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

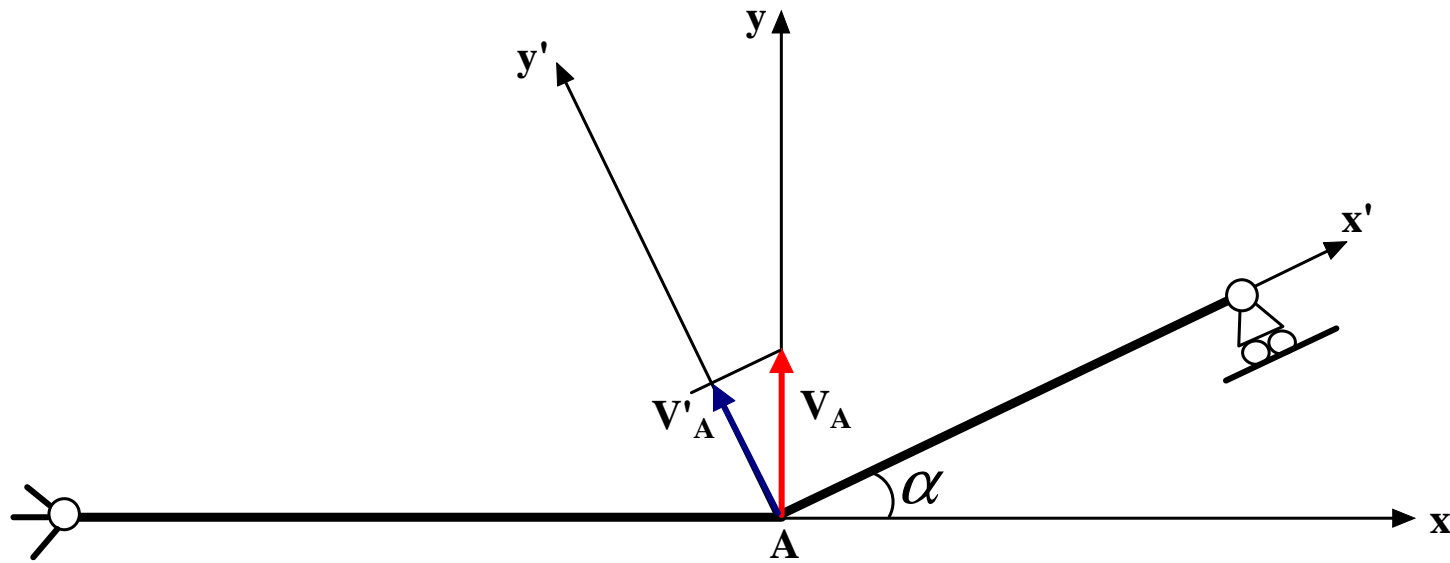
$$v_{AB}\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{CL^2}{128EI}$$

$$v_{DB}\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{CL^2}{128EI}$$

- La linea elastica risulta antisimmetrica rispetto al piano di mezzeria



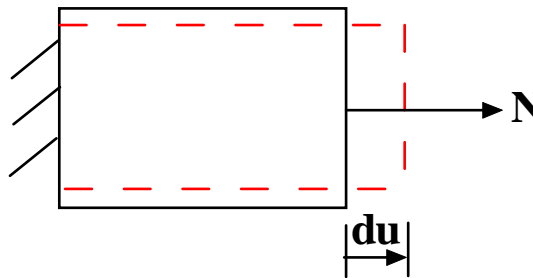
Congruenza nel caso di assi inclinati



$$V'_A = V_A \cos \alpha$$

ENERGIA ELASTICA

Energia di deformazione del concio elementare – effetto dell'azione normale



- Si possono avere 2 casi:
 - 1) N viene applicata gradualmente dal valore 0 al valore finale e contemporaneamente lo spostamento du cresce in modo proporzionale. In questo caso

$$dL_N = \frac{1}{2} N du$$

- 2) Lo spostamento du viene applicato dopo che N ha assunto il valore finale. In questo caso

$$dL_N^* = N du$$

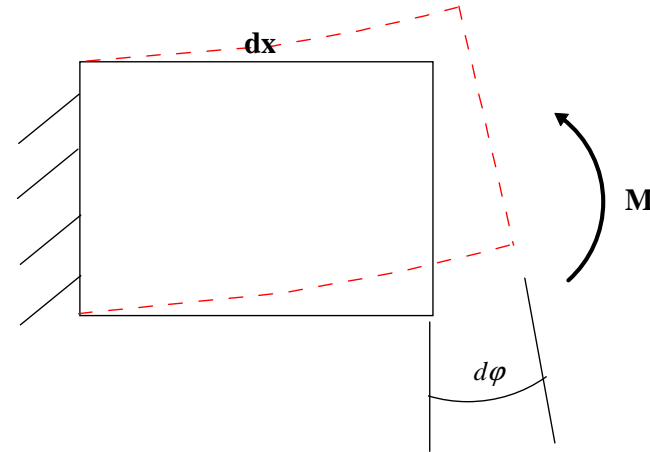
Energia di deformazione del concio elementare – effetto del momento flettente

- 1) Caso di incremento proporzionale di M e $d\varphi$

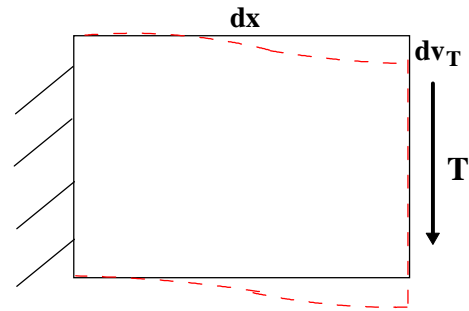
$$dL_M = \frac{1}{2} M d\varphi$$

- 2) Caso di applicazione istantanea di $d\varphi$

$$dL_M^* = M d\varphi$$



Energia di deformazione del concio elementare – effetto del taglio



1) Caso di incremento proporzionale di M e $d\varphi$

$$dL_T = \frac{1}{2} T dv$$

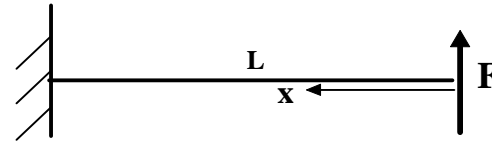
2) Caso di applicazione istantanea di $d\varphi$

$$dL_T^* = T dv_T$$

Trave a mensola

Energia elastica di deformazione totale

- L'energia totale si ottiene integrando sulla lunghezza e sommando le energie del concio elementare



$$N(x) = 0 \quad du = \frac{Ndx}{EA} = 0$$

$$T(x) = -F \quad dv_T = \chi \frac{Tdx}{GA}$$

$$M(x) = Fx \quad d\varphi = \frac{Mdx}{EI}$$

$$L = \int_L^1 \frac{1}{2} N du + \int_L^1 \frac{1}{2} T dv_T + \int_L^1 \frac{1}{2} M d\varphi = \int_L^1 \frac{1}{2} \frac{N^2 dx}{EA} + \int_L^1 \frac{1}{2} \chi \frac{T^2 dx}{GA} + \int_L^1 \frac{1}{2} \frac{M^2 dx}{EI}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \chi \frac{F^2 L}{GA} + \frac{1}{2} \frac{F^2 L^3}{3EI}$$

Energia elastica - considerazioni

- Il rapporto fra energia dovuta al taglio ed energia dovuta al momento flettente

$$\frac{L_T}{L_M} = \frac{\frac{1}{2} \chi \frac{F^2 L}{GA}}{\frac{1}{2} \frac{F^2 L^3}{3EI}} = \frac{3\chi EI}{GAL^2}$$

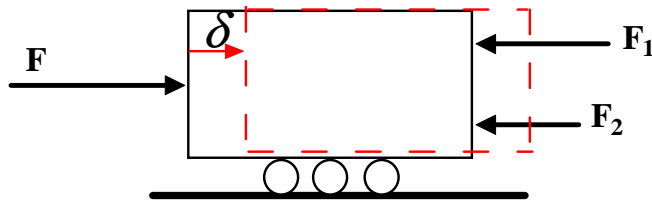
è molto piccolo perché $\frac{3\chi E}{G} \leq 10$ (per materiali metallici),
e per le normali aste lunghe e snelle risulta molto piccolo il
rapporto

$$\frac{I}{AL^2}$$

- Per aste con lunghezza grande rispetto alle dimensioni trasversali il contributo del taglio all'energia di deformazione si può trascurare

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Principio dei lavori virtuali per corpi e sistemi meccanici rigidi

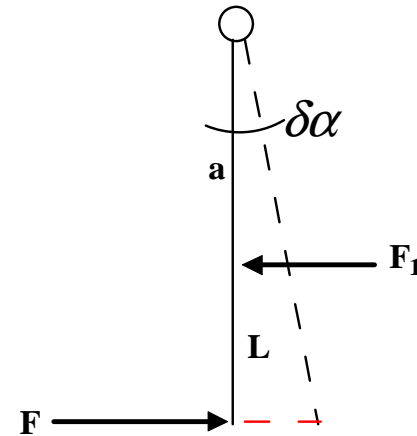


PLV

Per δ qualsiasi

$$F\delta - F_1\delta - F_2\delta = 0$$

$$F - F_1 - F_2 = 0$$



PLV

per $\delta\alpha$ qualsiasi

$$FL\delta\alpha - F_1a\delta\alpha = 0$$

$$FL - F_1a = 0$$

Principio dei lavori virtuali per strutture deformabili

- Ipotesi di base: la struttura è in equilibrio sotto l'azione delle forze applicate e dei vincoli
- Alla struttura viene idealmente applicato un sistema di spostamenti virtuali
- Il PLV stabilisce che il lavoro di deformazione compiuto dalle forze esterne (e dalle reazioni vincolari) è uguale al lavoro compiuto dalle azioni interne

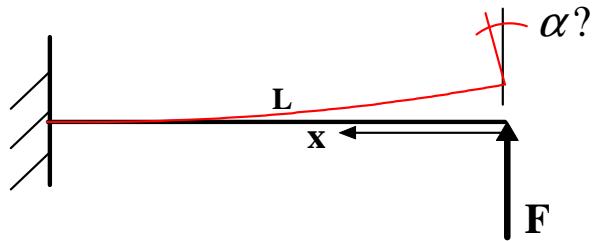
$$L_e = L_i$$

- Per il calcolo degli spostamenti è utile usare la versione del PLV nota come Metodo delle forze:
 - Il sistema delle forze è un sistema fittizio applicato alla struttura
 - Il sistema degli spostamenti (virtuale) è il sistema degli spostamenti della struttura reale

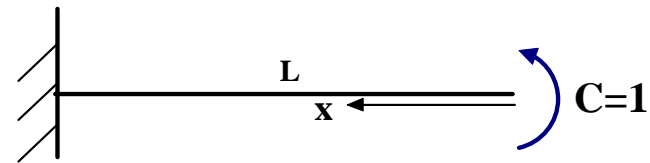
Esempio 1

- Si vuole calcolare la rotazione dell'estremità di una trave a mensola

SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI



SISTEMA DELLE FORZE



$$N(x) = 0 \quad du = \frac{Ndx}{EA} = 0$$

$$T(x) = -F \quad dv_T = -\chi \frac{Fdx}{GA}$$

$$M(x) = Fx \quad d\varphi = \frac{Fxdx}{EI}$$

PLV

$$L_e = 1 \cdot \alpha$$

$$L_i = \int_L N' du + \int_L T' dv_T + \int_L M' d\varphi = \int_L N' \frac{Ndx}{EA} + \int_L T' \frac{\chi Tdx}{GA} + \int_L M' \frac{Mdx}{EI} = \int_0^L 1 \frac{Fxdx}{EI} = \frac{FL^2}{2EI}$$

$$N'(x) = 0$$

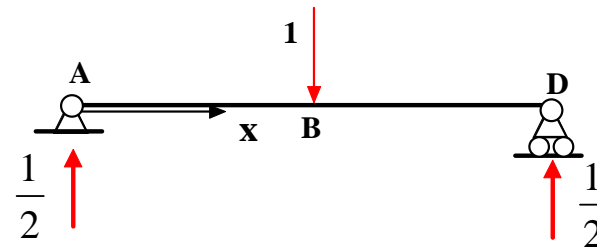
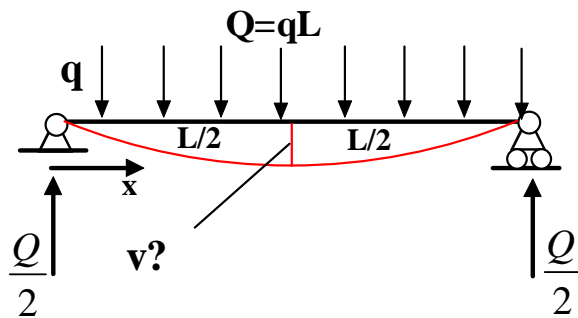
$$T'(x) = 0$$

$$M'(x) = 1$$

Esempio 2

Trave soggetta a carico distribuito

- Calcolo della freccia in mezzeria



SISTEMA SPOSTAMENTI

$$N(x) = 0$$

$$du = 0$$

$$T(x) = \frac{Q}{2} - qx$$

$$dv_T = \frac{\chi}{GA} \left(\frac{Q}{2} - qx \right) dx$$

$$M(x) = \frac{Q}{2}x - q \frac{x^2}{2}$$

$$d\varphi = \frac{1}{EI} \left(\frac{Q}{2}x - q \frac{x^2}{2} \right) dx$$

SISTEMA FORZE

AB)

BD)

$$N'(x) = 0$$

$$N'(x) = 0$$

$$T'(x) = \frac{1}{2}$$

$$T'(x) = -\frac{1}{2}$$

$$M'(x) = \frac{1}{2}x$$

$$M' = \frac{x}{2} - \left(x - \frac{L}{2}\right)$$

Esempio 2

PLV

- $L_e = L_i$

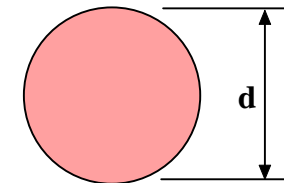
$$v = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{2} - qx \right) \frac{\chi dx}{GA} + \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x}{2} \left(\frac{Q}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{dx}{EI} - \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{2} - qx \right) \frac{\chi dx}{GA} + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{L-x}{2} \left(\frac{Q}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{dx}{EI} =$$
$$= \frac{\chi QL}{8GA} + \frac{5}{384} \frac{QL^3}{EI}$$

Se $\chi=1,1$; $d=40\text{mm}$; $L=1000\text{mm}$; $G=27000\text{MPa}$; $E=70000\text{MPa}$

$A=1257\text{mm}^2$; $I=125664\text{mm}^4$

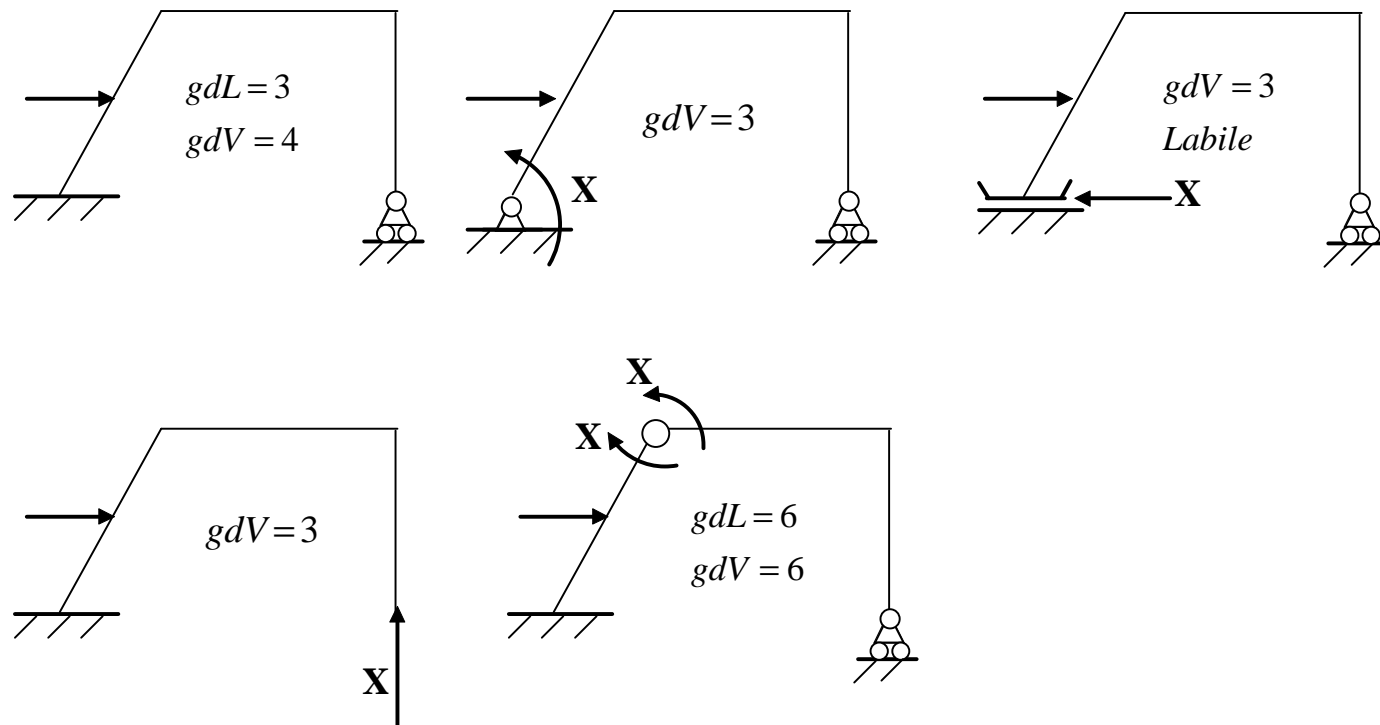
$v=Q(4,05 \cdot 10^{-6} + 1,48 \cdot 10^{-3})$

Da cui si vede che il contributo del taglio è trascurabile



Strutture con grado di iperstaticità pari a 1

- Modi per rendere isostatica una struttura iperstatica



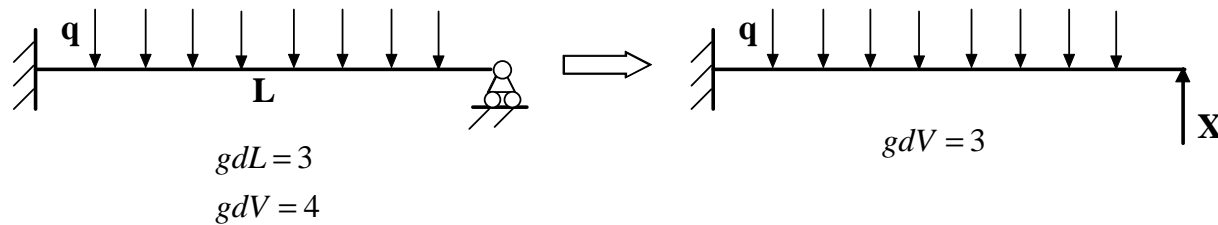
Strutture iperstatiche con g.i.=1

Risoluzione con il PLV

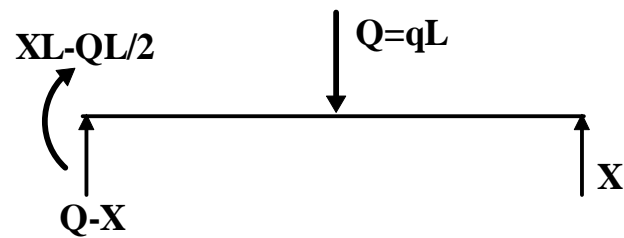
- 1) Rendere la struttura isostatica evidenziando la reazione iperstatica incognita X in corrispondenza del vincolo rilassato
- 2) Calcolare le reazioni vincolari in modo che risulti la dipendenza da X
- 3) Determinare le azioni interne e le componenti degli spostamenti interni elementari
- 4) Considerare la struttura fittizia isostatica in cui agisce come forza esterna la reazione X resa unitaria e determinarne reazioni e azioni interne
- 5) Calcolare il lavoro virtuale compiuto dal sistema delle azioni interne fittizie per gli spostamenti elementari della struttura reale e porlo pari a zero (nel caso di vincolo rilassato rigido)

Esempio 1

- 1) Rendere la struttura isostatica evidenziando la reazione iperstatica incognita X in corrispondenza del vincolo rilassato

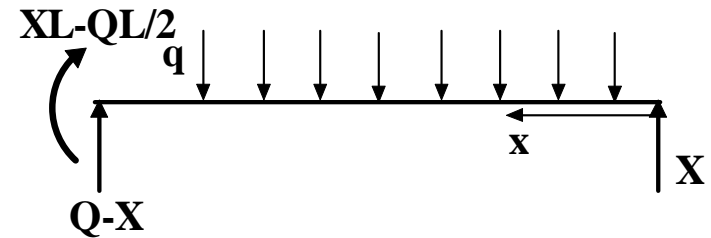


- 2) Calcolare le reazioni vincolari in modo che risulti la dipendenza da X



Esempio 1

- 3) Determinare le azioni interne e le componenti degli spostamenti interni elementari



$$N = 0$$

$$du = 0$$

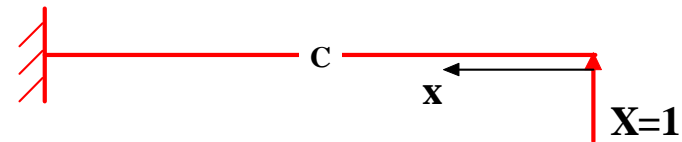
$$T = -X + qx$$

$$dv_T = \frac{\chi(-X + qx)dx}{GA}$$

$$M = Xx - \frac{qx^2}{2}$$

$$d\varphi = \frac{1}{EI} \left(Xx - \frac{qx^2}{2} \right) dx$$

- 4) Considerare la struttura fittizia isostatica in cui agisce come forza esterna la reazione X resa unitaria e determinarne reazioni e azioni interne



$$N' = 0$$

$$T' = -1$$

$$M' = x$$

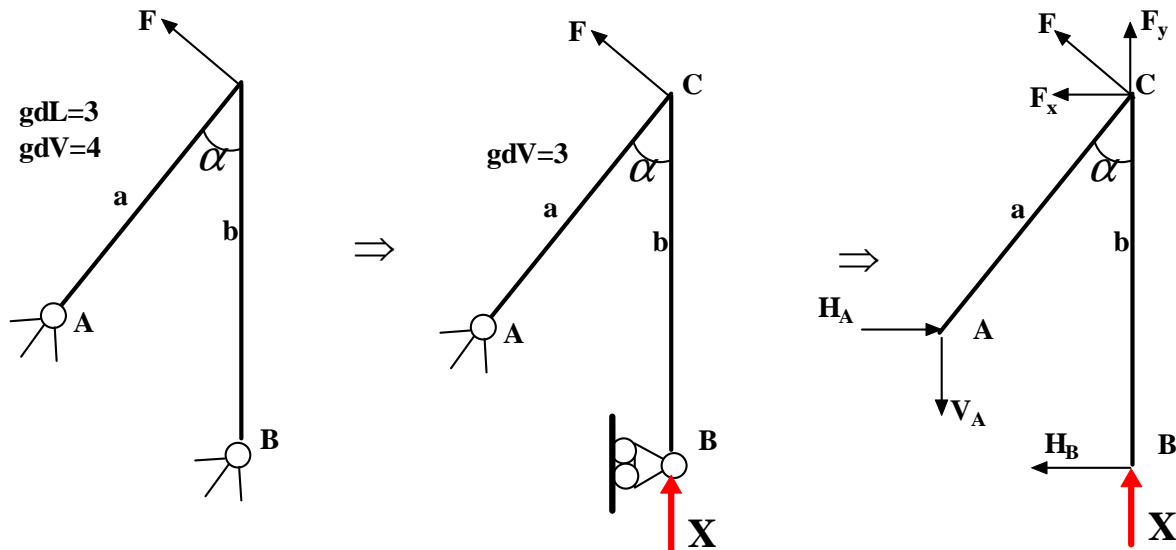
Esempio 1

- 5) Calcolare il lavoro virtuale compiuto dal sistema delle azioni interne fittizie per gli spostamenti interni elementari della struttura reale e porlo pari a zero (nel caso di vincolo rilassato rigido)

$$L_e = 0 = L_i = \int_0^L N' du + \int_0^L T' dv_T + \int_0^L M' d\varphi = \int_0^L \frac{\chi(X - qx) dx}{GA} + \int_0^L \frac{x}{EI} \left(Xx - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{\chi}{GA} \left(XL - \frac{qL^2}{2} \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{XL^3}{3} - \frac{qL^4}{8} \right)$$

$$X \left(\frac{\chi L}{GA} + \frac{1}{EI} \frac{L^3}{3} \right) = \frac{qL^2}{2GA} + \frac{qL^4}{8EI} \rightarrow X = \frac{\frac{qL^2}{2GA} + \frac{qL^4}{8EI}}{\frac{\chi L}{GA} + \frac{1}{EI} \frac{L^3}{3}}$$

Esempio 2



dati:
 $F = 1 \text{ kN}$ $a = 1000 \text{ mm}$ $b = 1400 \text{ mm}$

$$\alpha = 33^\circ$$

$$F_x = F \cos \alpha = 838,7 \text{ N}; \quad F_y = F \sin \alpha = 544,6 \text{ N}$$

$$\rightarrow) -F_x + H_A - H_B = 0$$

$$\uparrow) -V_A + F_y + X = 0$$

$$A) \quad Fa - H_B(b - a \cos \alpha) + X \sin \alpha = 0$$

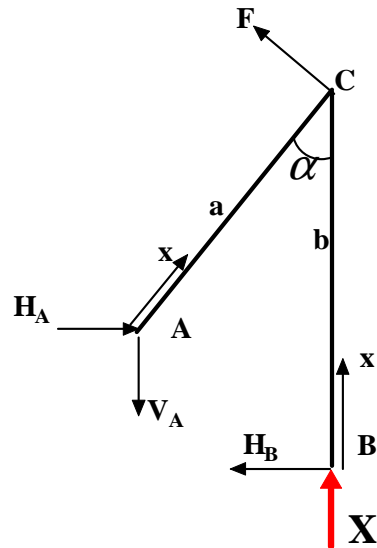
$$\uparrow) \quad V_A = F_y + X = 544,6 + X$$

$$A) \quad H_B = \frac{Fa + X \sin \alpha}{b - a \cos \alpha} = 1782 + 0,9703X$$

$$\rightarrow) \quad H_A = 2621 + 0,9703X$$

Esempio 2

struttura reale-sistema degli spostamenti



AC)

$$N = -H_A \sin \alpha + V_A \cos \alpha = -970,6 + 0,3103X$$

$$T = -H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha = -2495 - 1,358X$$

$$M = (-H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha)x = -2495x - 1,358Xx$$

BC)

$$N = -X$$

$$T = H_B = 1782 + 0,9703X$$

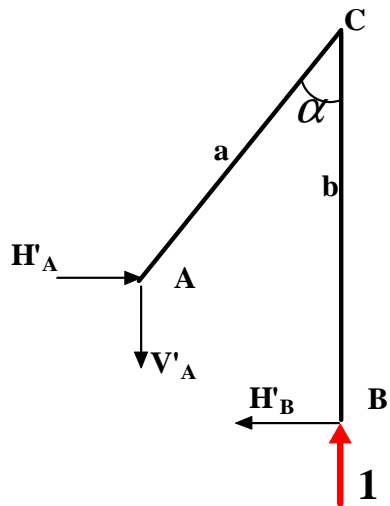
$$M = -H_B x = -1782x - 0,9703Xx$$

Spostamenti infinitesimi

$$du = \frac{Ndx}{EA}; \quad dv_T = \frac{\chi Tdx}{GA}; \quad d\varphi = \frac{Mdx}{EI}$$

Esempio 2

struttura fittizia-sistema delle forze



Le reazioni vincolari risultano :

$$H'_A = 0,9703; \quad V'_A = 1; \quad H'_B = H'_A = 0,9703$$

Le azioni interne :

$$AC) \quad N' = -H'_A \sin \alpha + V'_A \cos \alpha = 0,3103$$

$$T' = -H'_A \cos \alpha - V'_A \sin \alpha = -1,358$$

$$M' = (-H'_A \cos \alpha - V'_A \sin \alpha)x = -1,358x$$

$$BC) \quad N' = -1$$

$$T' = H'_B = 0,9703$$

$$M' = -H'_B x = -0,9703x$$

PLV (trascurando il taglio)

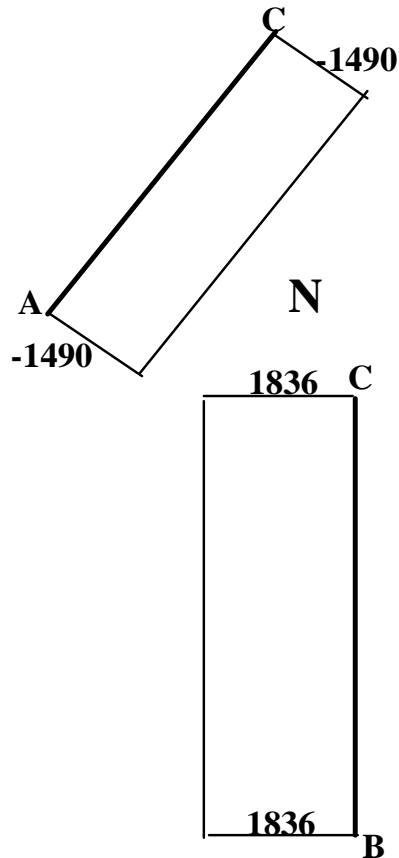
$$L_e = 0 = L_i = \int N' \frac{N dx}{EA} + \int T' \frac{\chi T dx}{GA} + \int M' \frac{M dx}{EI}$$

$$= \frac{1}{EA} (-0,3012 \cdot 10^6 + 1710,3X) + \frac{1}{EI} (2,71 \cdot 10^{12} + 14,76 \cdot 10^8 X) \quad X = \frac{0,3012 \cdot 10^6 - 2,71 \cdot 10^{12} \frac{A}{I}}{1710 + 14,76 \cdot 10^8 \frac{A}{I}}$$

$$\text{Se } d = 50\text{mm}; \quad A = 1964\text{mm}^2; \quad I = 306797\text{mm}^4 \quad X = -1836\text{N}$$

Esempio 2

azioni interne



AC)

$$N = -970,6 + 0,3103X = -1480N$$

$$T = -2495 - 1,358X \approx 0$$

$$M = -2495x - 1,358Xx \approx 0$$

BC)

$$N = -X = -1836N$$

$$T = 1782 + 0,9703X \approx 0$$

$$M = -1782x - 0,9703Xx \approx 0$$